理论力学期末习题课

助教: 张积翔

university of science and technology of china

2026 年 1 月 11 日

绝热不变量

系统：

$$H(q,p,\lambda(t)), \qquad \lambda(t) \text{ 缓慢变化.}$$

定义：若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|\dot{\lambda}| < \delta$ 且 $t < 1/|\dot{\lambda}|$ 时，

$$|A(t) - A(0)| < \varepsilon,$$

则称 A 为绝热不变量

定理

对周期运动系统，作用变量在绝热变化下保持不变：

$$J_\alpha = \frac{1}{2\pi}\oint p_\alpha \, dq_\alpha = \text{const} \quad \text{指标不求和}$$

典型应用：单摆缓慢改变长度

转动矩阵与欧拉角

两个参考系

通常在刚体问题中有两种关键参考系：惯性系（地面系）与随体系（或更常用主轴系）。角速度在随体系中写出，用欧拉角表示随体系相对于惯性系的转动（进动角 ϕ、章动角 θ、自转角 ψ）

转动矩阵：$RR^T = I, detR = 1$，罗德里格斯公式
与欧拉角的关系：$R(\phi, \theta, \psi) = R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi)$

欧拉运动学方程

欧拉运动学方程（将角速度和欧拉角联系）：

$$\omega_1 = \sin\theta\sin\psi\dot{\phi} + \cos\psi\dot{\theta}$$

$$\omega_2 = \sin\theta\cos\psi\dot{\phi} - \sin\psi\dot{\theta}$$

$$\omega_3 = \cos\theta\dot{\phi} + \dot{\psi}$$

转动惯量

转动惯量定义（依赖于参考系和参考点）：

$$I_{ij} = \int \left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right) dm$$

平行轴定理：

$$I_D = I_C + m\left(r^2 I - \vec{r}\vec{r}^T\right)$$

主轴系与主转动惯量（转动惯量矩阵对角化）：

$$I = diag(I_1, I_2, I_3)$$

刚体动力学

在主轴系中，刚体的角动量、转动动能为：

$$J = I\vec{\omega} = I_1\omega_1 e_1 + I_2\omega_2 e_2 + I_3\omega_3 e_3, \quad T = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2$$

运动方程为（通常在随体系中使用）：

$$\vec{M} = \frac{d}{dt}\vec{J} + \vec{\omega} \times \vec{J}$$

欧拉动力学方程

解出 $\vec{\omega}$ 后代入运动学方程得欧拉角。

$$\begin{aligned}
M_1 &= I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 \\
M_2 &= I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 \\
M_3 &= I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2
\end{aligned}$$

欧拉陀螺

自由陀螺不受力矩，定点转动，I_1, I_2, I_3 任意。
拉氏量：

$$L = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)$$

在主轴系 Euler 动力学方程：

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3, \\ I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1, \\ I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2. \end{aligned}$$

守恒量：动能 T 守恒，惯性系中角动量守恒，随体系中角动量大小 J^2 守恒分量不守恒

欧拉陀螺：解与稳定性

求解：将 ω_1,ω_2 用守恒量 T, J^2 表示，代入第三个欧拉动力学方程得

$$\dot{\omega}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\omega_1\omega_2$$

稳定性

设定初始

$$\omega_i, \omega_j \approx 0, \quad \omega_k \gg \omega_i, \omega_j$$

代入欧拉动力学方程求得形如 $\ddot{\omega}_i = k\omega_i$ 的表达式，根据 k 的正负判断稳定性。

结论为：绕最大或最小主惯量轴转动稳定，绕中间主轴转动不稳定

拉格朗日陀螺

对称 $I_1 = I_2 \neq I_3$，受到重力作用，定点转动拉氏量：

$$L = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + \frac{I_3}{2}(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)^2 - mgl\cos\theta$$

守恒量：

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot\psi} = I_3(\cos\theta\,\dot\phi + \dot\psi) = J_3$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I_1\dot\phi\sin^2\theta + I_3(\cos\theta\,\dot\phi + \dot\psi)\cos\theta = J_z$$

$$E = \frac{I_1}{2}(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta) + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta$$

根据守恒量解出 $\dot\phi, \dot\psi$

有效势与均匀进动

均匀进动指章动角不变、进动角速度守恒：

$$\dot{\theta} = 0, \quad \dot{\phi} = const.$$

有效势

有效势：

$$V_{eff}(\theta) = \frac{(J_z - J_3 \cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta$$

能量守恒表达式写为：

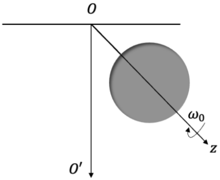
$$E = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + V_{eff}(\theta)$$

因此均匀进动需满足 $\frac{dV_{eff}(\theta)}{d\theta} = 0$，等价二次方程：

$$I\cos\theta\,\dot{\phi}^2 - J_3\dot{\phi} + mgl = 0$$

例题：拉格朗日陀螺

如图所示，半径为 R、质量为 m 的均匀球体与顶部 O 被轻杆连接，顶点 O 到球心 C 的距离为 $l = 2R$。以球心为原点建立本体系，OC 连线方向为 z 轴，球以角速度 $\omega = \omega_0 \hat{z}$ 自转。从 O 点作竖直向下的直线 OO'，定为空间系的 z' 轴。球的初始章动角 $\theta = \theta_0$。



1. 求随体系中的转动惯量;
2. 写出哈密顿量，证明 p_ϕ, p_ψ 守恒并求其值;
3.$\theta_0 = 60^\circ$，$R\omega_0^2 = 132g$ 时，求 $T_{\max}$。

(1) 转动惯量

球自身的主转动惯量为

$$I_{\text{sphere}} = \frac{2}{5}mR^2.$$

以球心为原点、$z \parallel OC$ 为主轴，垂直于 OC 的两轴用平行轴定理：

$$J_1 = J_2 = \frac{2}{5}mR^2 + m(2R)^2 = \frac{22}{5}mR^2, \qquad J_3 = \frac{2}{5}mR^2.$$

(2) 拉氏量与守恒量

欧拉角 (ϕ,θ,ψ)，利用欧拉运动学方程

$$\omega_1^2+\omega_2^2=\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta, \qquad \omega_3=\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi}.$$

系统拉格朗日量为：

$$L=\frac{1}{2}J_{12}(\dot{\theta}^2+\dot{\phi}^2\sin^2\theta)+\frac{1}{2}J_3(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi})^2+2mgR\cos\theta.$$

ϕ,ψ 为循环坐标，故广义动量守恒：

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=J_3(\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\psi}),$$

$$p_\phi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}}=J_{12}\dot{\phi}\sin^2\theta+p_\psi\cos\theta.$$

初始 $\dot{\phi}_0=\dot{\theta}_0=0,\ \dot{\psi}_0=\omega_0$，因此

$$p_\psi=\frac{2}{5}mR^2\omega_0, \qquad p_\phi=\frac{2}{5}mR^2\omega_0\cos\theta_0$$

(3) 能量守恒与有效势

机械能

$$E = \frac{1}{2}J_{12}(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - 2mgR\cos\theta.$$

用 p_ψ, p_ϕ 消去 $\dot{\phi}, \dot{\psi}$:

$$\dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{J_{12}\sin^2\theta} = \frac{p_\psi(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{J_{12}\sin^2\theta}, \qquad \frac{1}{2}J_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 = \frac{p_\psi^2}{2J_3}.$$

故

$$E = \frac{1}{2}J_{12}\dot{\theta}^2 + \frac{p_\psi^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2}{2J_{12}\sin^2\theta} + \frac{p_\psi^2}{2J_3} - 2mgR\cos\theta.$$

代入 $J_{12} = \frac{22}{5}mR^2$, $J_3 = \frac{2}{5}mR^2$, $p_\psi = \frac{2}{5}mR^2\omega_0$ 可化为

$$E = \frac{11}{5}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{2}{5}mgR\left[6\frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + 66 - 5\cos\theta\right].$$

极值条件与 $T_{\max}$

动能最大 $\Leftrightarrow$ 势能最小，θ 最小，即在极值点 $\dot{\theta} = 0$，$\frac{dV_{\mathit{eff}}(\theta)}{d\theta} = 0$ 得

$$6\frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2}{\sin^2\theta} + 5(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0.$$

化简得

$$5\cos^2\theta + 6\cos\theta - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos\theta_{\min} = \frac{4}{5}$$

当 $\theta = \theta_{\min}$ 且 $\dot{\theta} = 0$，

$$T_{\max} = \frac{2}{5}mgR\left[6\frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta_{\min})^2}{\sin^2\theta_{\min}} + 66\right].$$

代入 $\theta_0 = 60°$，$\cos\theta_{\min} = \frac{4}{5}$ 得括号第一项为 $\frac{3}{2}$，因此

$$T_{\max} = \frac{2}{5}mgR\left(\frac{3}{2} + 66\right) = 27\,mgR$$

THE END

期末计算量不会逊于期中，需要有计算熟练度。

考试前注重休息，保证考试状态。

祝期末考试顺利！