理论力学期中习题课

知识点复习

助教: 张积翔

university of science and technology of china

2025 年 11 月 28 日

泛函与变分法

主要讨论积分型泛函：

对于固定边界的泛函，极值条件为欧拉-拉格朗日方程

$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$。(对部分问题，不“硬”求解欧拉方程，利用守恒量是更好的选择）边界的函数值不固定则有自然边界条件

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\Big|_{t=t_1,t_2} = 0$，若边界可动，则自然边界条件再加上 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\dot{q} - L = 0$

多宗量问题、边界约束问题

拉格朗日光学：费马原理

费马原理

光线在两点 A、B 之间传播的实际路径，是使传播时间取极值 (通常是极小值）的路径。

$$\delta t_{AB} = \delta \int_A^B \frac{ds}{v(\vec{x})} = 0$$

其中 $v(\vec{x}) = c/n(\vec{x})$ 是介质中的光速。

光程

引入光程 L：

$$\delta t_{AB} = \frac{1}{c}\delta \underbrace{\int_A^B n(\vec{x})ds}_{L} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta L = \delta \int_A^B n(\vec{x})ds = 0$$

真实光线的光程取极值。

莫培督原理

哈密顿形式的莫培督原理

在所有连接 A、B 两点的等能路径中，系统运动的真实路径是使约化作用量 W 取极值的路径。

$$\Delta W[q] = \Delta \int_A^B p_\alpha dq_\alpha = 0$$

注意等能变分。优点为便于求解运动轨道，即在计算中我们通过等能条件，将时间导数从表达式中消去。

莫培督原理：雅可比形式

从作用量到几何

对于动能 $T = \frac{1}{2} M_{\alpha\beta} \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta$ 的系统：
定义黎曼空间中的线元与度规

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta = 2[E - V(\vec{q})] M_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta$$

雅可比形式的莫培督原理：质点的真实运动轨迹，是在此黎曼空间中的测地线。

$$\Delta \int_{s_1}^{s_2} ds = 0$$

(可求解有心力场的运动轨迹)

连续体系的拉格朗日力学

拉格朗日密度

- 离散系统：拉格朗日函数 $L(t, q, \dot{q})$
- 连续系统：定义 **拉格朗日密度** $\mathcal{L}$，使得

$$L = \int \mathcal{L} dV \quad \text{或} \quad L = \int \mathcal{L} dx \text{ (一维)}$$

- $\mathcal{L}$ 通常是场及其导数的函数：$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_t\psi, \partial_x\psi, x, t)$，仍然可以用动量密度减去势能密度表示拉格朗日密度 $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$

以弹性棒为例

动能密度：$\frac{1}{2}\rho A(\partial_t\psi)^2$
势能密度（弹性势能）：$\frac{1}{2}EA(\partial_x\psi)^2$
拉格朗日密度：$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho A(\partial_t\psi)^2 - \frac{1}{2}EA(\partial_x\psi)^2$

连续体系的拉格朗日力学：场方程

欧拉-拉格朗日方程（场论形式）

作用量 $S = \iint \mathcal{L} dt dx$ 取极值，导出场的运动方程：

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)}\right) + \frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \psi)}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$$

其中“全偏导”：

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} t} \overset{\text{def}}{=} \partial_t + (\partial_t \psi)\frac{\partial}{\partial \psi} + (\partial_t^2 \psi)\frac{\partial}{\partial(\partial_t \psi)} + (\partial_t \partial_x \psi)\frac{\partial}{\partial(\partial_x \psi)}$$

$$\frac{\bar{\partial}}{\bar{\partial} x} \overset{\text{def}}{=} \partial_x + (\partial_x \psi)\frac{\partial}{\partial \psi} + (\partial_x \partial_t \psi)\frac{\partial}{\partial(\partial_t \psi)} + (\partial_x^2 \psi)\frac{\partial}{\partial(\partial_x \psi)}$$

波动方程的解法

$$\rho(\frac{\partial\psi}{\partial t})^2 - E(\frac{\partial\psi}{\partial x})^2$$

行波法

做变换 $a = x + vt, b = x - vt, v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$，得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial a\partial b} = 0$$

分离变量法

边界固定 $\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0$（或者边界导数值固定），分离变量 $\psi(x,t) = T(t)u(x)$ 代入微分方程，让方程左边只含 t，右边只含 x，故等于常数，得到 T 和 u 分别满足的微分方程，又由于边界条件 u 的解只能为 $\sin\frac{n\pi x}{l}$ 的形式，最后将通解写为级数形式。(技术细节参考作业 16 的 22 题)

诺特定理

- 无穷小变换：

$$\Delta t = \epsilon_i \frac{\partial \xi_0}{\partial \lambda_i}|_{\lambda=\lambda_0}, \quad \Delta q_\alpha = \epsilon_i \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \lambda_i}|_{\lambda=\lambda_0}$$

  即我们只考虑无穷小变换的一阶近似
- 对称变换：作用量不变 $\Delta S = 0$
- 准对称变换：$\delta S(\lambda_0) = \delta S(\lambda)$
  等价于 $\Delta(Ldt) = d\varphi(t, q)$，可通过对其求外微分为零证明强可积，若 $\Delta(Ldt) = 0$ 则为对称变换。

诺特定理

对于无穷小准对称变换：

$$-H\Delta t + p_\alpha \Delta q_\alpha - \Delta\varphi = \text{常数}$$

其中：

- H：广义能量
- p_α：广义动量
- $\Delta\varphi$：规范函数的变化

关于诺特定理的题目，只需将变换后的坐标 (q', t') 代入拉氏量得到 $L(t', q', \frac{dq'}{dt'})$，计算 φ 代入守恒量表达式即可。注意这里面的均取一阶无穷小量。

例：广义动量与能量守恒

广义动量守恒

若 L 不依赖于 q_α，则空间平移 $\Delta q_\alpha = \epsilon$ 是对称变换，守恒量为：

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

广义能量守恒

若 L 不依赖于 t，则时间平移 $\Delta t = \epsilon$ 是对称变换，守恒量为：

$$H = p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

对称与守恒

诺特定理将对称与守恒相联系：

- 时间平移 $\Leftrightarrow$ 能量守恒
- 空间平移 $\Leftrightarrow$ 动量守恒
- 旋转变换 $\Leftrightarrow$ 角动量守恒
- 伽利略 boost$\Leftrightarrow$ 力对质心的作用

(建立对应的物理直觉)

狭义相对论

- 时空坐标：$x^\mu = (t, x, y, z)$
- 度规：$g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$
- 庞加莱变换：$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$

洛伦兹群 Λ 满足 $\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \eta^{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$

狭义相对论下的拉格朗日函数

自由粒子作用量

$$S = -m \int \mathrm{d}\tau = -m \int \sqrt{1 - v^2}\, \mathrm{d}t$$

拉氏函数:

$$L = -m\sqrt{1 - v^2}$$

广义动量是

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} = \gamma m \vec{v}$$

其中洛伦兹因子是

$$\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}$$

广义能量是

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{m}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} = \gamma m$$

带电粒子的拉氏量

最小耦合拉氏函数

$$L = -m\sqrt{1-v^2} - q(\phi - \vec{A}\cdot\vec{v})$$

其中 ϕ 为标量势、$\vec{A}$ 为矢量势，二者可以写为四维的规范场 $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$

规范变换 *

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu f$$

运动方程不变。
因此规范场有一个冗余的自由度，因而可以附加一个规范条件，如 Lorenz 规范：

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

洛伦兹力与运动方程

广义动量

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} + q\vec{A}$$

运动方程

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\text{mech}}}{\mathrm{d}t} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

其中:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{p}_{mech} = \vec{p} - q\vec{A} = \gamma m\vec{v}$$

四维形式 *

协变的四速度与四动量：

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad p^\mu = mv^\mu$$

四维的牛顿方程：

$$F^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}$$

四维力定义为：

$$F^\mu = (\gamma \vec{F} \cdot \vec{v}, \gamma \vec{F})$$

THE END

重要的是用变分法处理问题的能力、诺特定理。
若有时间精力，最好将作业过一遍并保持计算熟练度。

祝期中考试顺利！