理论力学作业参考答案

助教：张积翔

2026 年 1 月 22 日

前言

本人于 2025 年秋季担任朱杰界老师的理论力学 A 课程助教，这是一次值得回忆的助教经历，某种意义上让我又学习了一遍理论力学。

课程共布置了 32 次作业，我和另一位于助教为每次作业的每道题目都编写了答案。平均每周我都要花上 3-4 个小时来做这份作业解答，回头看还是成就感满满。

本人负责的是偶数次作业，将其整理在该文件中。

理论力学作业 02 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

6. 使用张量符号进行计算、化简

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) =?$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) =?$$

$$\nabla \cdot (\psi \vec{a}) =?$$

$$\nabla \times (\psi \vec{a}) =?$$

Solution

$$\begin{aligned}
\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{kmmn} b_m c_n \\
&= \hat{e}_i a_j b_m c_n (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) \\
&= \hat{e}_i b_i a_j c_j - c_i a_j b_j \\
&= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times \vec{a}) &= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon_{kmn} \partial_m a_n) \\
&= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \partial_j \partial_m a_n \\
&= \hat{e}_i (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) \partial_j \partial_m a_n \\
&= \hat{e}_i (\partial_i \partial_n a_n - \partial_j \partial_j a_i) \\
&= \nabla(\nabla \cdot \vec{a}) - \nabla^2 \vec{a}, \quad where \nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\psi \vec{a}) &= \partial_i (\psi a_i) \\
&= (\partial_i \psi) a_i + \psi (\partial_i a_i) \\
&= (\nabla \psi) \cdot \vec{a} + \psi (\nabla \cdot \vec{a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\psi \vec{a}) &= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j (\psi a_k) \\
&= \hat{e}_i \varepsilon_{ijk} [(\partial_j \psi) a_k + \psi (\partial_j a_k)] \\
&= (\nabla \psi) \times \vec{a} + \psi (\nabla \times \vec{a})
\end{aligned}$$

7. 矢量场 $\vec{B}$ 分别取成

（1）均匀磁场

$$\vec{B} = -\frac{1}{2}\vec{B}^{(0)}$$

（2）均匀梯度磁场

$$B_j = -\frac{1}{3}B^{(1)}_{jk}x_k$$

（3）二次多项式磁场

$$B_j = -\frac{1}{4}B^{(2)}_{jkl}x_kx_l$$

三种形式。表达式中的系数 $B^{(0)}_j, B^{(1)}_{jk}, B^{(2)}_{jkl}$ 都是常数。为了满足无源条件

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0$$

这些系数还满足

$$B^{(1)}_{jj} = 0, \quad B^{(2)}_{jj} = 0, \quad B^{(2)}_{jkl} = 0$$

对这三种情况，请分别计算并化简

$$\nabla\times(\vec{x}\times\vec{B})$$

根据上述结果，三种磁场的矢量势 $\vec{A}$ 分别是什么？

Solution

$$\begin{aligned}
\left[\nabla\times(\vec{x}\times\vec{B})\right]_i &= \varepsilon_{ijk}\partial_j(\varepsilon_{kmn}x_mB_n) \\
&= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn}\partial_j(x_mB_n) \\
&= (\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\partial_j(x_mB_n) \\
&= \partial_j(x_iB_j)-\partial_j(x_jB_i) \\
&= B_i + x_i\partial_jB_j - 3B_i - x_j\partial_jB_i \\
&= -2B_i + x_i(\nabla\cdot\vec{B}) - (\vec{x}\cdot\nabla)B_i
\end{aligned}$$

由于 $\nabla\cdot\vec{B}=0$，所以：

$$\nabla\times(\vec{x}\times\vec{B}) = -2\vec{B}-(\vec{x}\cdot\nabla)\vec{B}$$

对于三种磁场情况：

均匀磁场 $\vec{B} = -\frac{1}{2}\vec{B}^{(0)}$：

$$\nabla\times(\vec{x}\times\vec{B}) = -2\vec{B} = \vec{B}^{(0)}$$

$$\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{x}\times\vec{B}$$

Solution

均匀梯度磁场 $B_j = -\frac{1}{3}B^{(1)}_{jk}x_k$：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{x}\times\vec{B}) &= -2\vec{B} + \frac{1}{3}\hat{e}_j x_i \partial_i (B^{(0)}_{jk}x_k)\\ &= -2\vec{B} + \frac{1}{3}\hat{e}_j x_i B^{(1)}_{ji}\\ &= -3\vec{B}\end{aligned}$$

$$\vec{A} = -\frac{1}{3}(\vec{x}\times\vec{B})$$

二次多项式磁场 $B_j = -\frac{1}{4}B^{(2)}_{jkl}x_k x_l$：

$$\begin{aligned}\nabla \times (\vec{x}\times\vec{B}) &= -2\vec{B} + \frac{1}{4}\hat{e}_j x_i \partial_i B^{(2)}_{jkl}x_k x_l\\ &= -4\vec{B}\\ A_i &= -\frac{1}{4}(\vec{x}\times\vec{B})\end{aligned}$$

8. 小船被水冲走后，用缆绳拉回岸边。假定水流平行于河岸，速率为 c_1；拉绳的速率为 c_2，这两个速率均保持不变。

以水流方向为极轴，拉绳者为原点，建立平面极坐标系，并在此坐标系求出小船的轨迹曲线。

Solution

在极坐标系中，小船沿着半径方向的速度为 $v_r = -c_2$，垂直半径方向的速度完全由水速提供，故：

$$v_\theta = -c_1 sin\theta$$

即 $\vec{v} = -c_2\hat{r} - c_1 sin\theta\hat{\theta}$，又 $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\dot{r} = -c_2, \quad r\dot{\theta} = -c_1 sin\theta$$

两式相除得：

$$\frac{dr}{r} = \frac{c_2}{c_1 sin\theta}d\theta$$

解微分方程得小船运动轨迹为：

$$r = C(tan\frac{\theta}{2})^{\frac{c_2}{c_1}}$$

以下两题是额外的练习，不需要提交给助教，不计入作业成绩：

9. R 是转动矩阵，证明 $\vec{a}\times\vec{b}$ 像矢量一样转动：

$$R(\vec{a}\times\vec{b}) = (R\vec{a})\times(R\vec{b})$$

Solution

$$\begin{aligned}(R\vec{a})\times(R\vec{b}) &= \hat{e}_k\varepsilon_{kil}(R_{ij}a_j)(R_{lm}a_m)\\ &= \hat{e}_k\varepsilon_{kil}R_{ij}R_{lm}a_jb_m\end{aligned}$$

$$R(\vec{a}\times\vec{b}) = \hat{e}_k\varepsilon_{ijm}R_{ki}a_jb_m$$

由 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的任意性，若要证题中等式成立，即证明：

$$\varepsilon_{kil}R_{ij}R_{lm} = \varepsilon_{ijm}R_{ki}$$

利用 $R^TR = I$,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{kil}R_{ij}R_{lm} &= \varepsilon_{kil}R_{ij}R_{lm}\delta_{rk}\\ &= \varepsilon_{ril}R_{ij}R_{lm}R_{rn}R_{kn}\\ &= \varepsilon_{njm}det(R)R_{kn}\\ &= \varepsilon_{ijm}R_{ki}\end{aligned}$$

题中等式得证

10. 设

$$\phi(\vec{x}) = -\vec{x}\cdot\int_0^1\vec{E}(\lambda\vec{x})d\lambda,\quad \vec{A}(\vec{x}) = -\int_0^1\lambda\vec{x}\times\vec{B}(\lambda\vec{x})d\lambda$$

其中积分项中的矢量场满足

$$\nabla\times\vec{E} = \vec{0},\quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

求 $-\nabla\phi, \nabla\times\vec{A}$。

提示：利用分部积分化简。这题给出了任意电场 $\vec{E}(\vec{x})$ 的标量势函数，以及任意磁场 $\vec{B}(\vec{x})$ 的矢量势函数。

Solution

计算 $-\nabla\phi$：

$$
\begin{aligned}
-\nabla\phi &= \nabla\left(\vec{x}\cdot\int_0^1 \vec{E}(\lambda\vec{x})d\lambda\right)\\
&= \hat{e}_i\partial_i\left(x_j\int_0^1 E_j(\lambda\vec{x})d\lambda\right)\\
&= \hat{e}_i\int_0^1 E_i(\lambda\vec{x})d\lambda + \hat{e}_i x_j\int_0^1 \partial_i E_j(\lambda\vec{x})d\lambda
\end{aligned}
$$

将第一项分部积分：

$$
\begin{aligned}
E_i(\lambda\vec{x}) &= \frac{d(\lambda E_i)}{d\lambda} - \lambda\frac{dE_i}{\lambda}\\
\frac{dE_i}{d\lambda} &= \frac{\partial E_i(\lambda\vec{x})}{\partial(\lambda x_j)}\frac{d(\lambda x_j)}{d\lambda} = \frac{x_j}{\lambda}\partial_j E_i
\end{aligned}
$$

故：

$$
\begin{aligned}
-\nabla\phi &= \hat{e}_i\int_0^1\left[\frac{d(\lambda E_i)}{d\lambda} - \lambda\frac{dE_i}{d\lambda}\right]d\lambda + \hat{e}_i x_j\int_0^1 \lambda\partial_i E_j(\lambda\vec{x})d\lambda\\
&= \hat{e}_i\left[\lambda E_i(\lambda\vec{x})\Big|_0^1 + \int_0^1 (x_j\partial_i E_j(\lambda\vec{x}) - x_j\partial_j E_i(\lambda\vec{x}))d\lambda\right], \nabla\times\vec{E} = 0\\
&= \vec{E}(\vec{x})
\end{aligned}
$$

计算 $\nabla\times\vec{A}$：

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{A} &= -\nabla\times\left(\int_0^1 \lambda\vec{x}\times\vec{B}(\lambda\vec{x})d\lambda\right)\\
&= -\hat{e}_i\varepsilon_{ijk}\partial_j\int_0^1 \lambda\varepsilon_{kmn}x_m B_n(\lambda\vec{x})d\lambda\\
&= -\hat{e}_i(\delta_{mi}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\int_0^1 \lambda\partial_j(x_m B_n(\lambda\vec{x}))d\lambda\\
&= \hat{e}_i\left(-\int_0^1 \lambda\partial_j(x_i B_j)d\lambda + \int_0^1 \lambda\partial_j(x_j B_i)d\lambda\right)\\
&= \hat{e}_i\int_0^1 d\lambda\left[-\lambda B_i - x_i\partial_j B_j + \lambda(3B_i + x_j\partial_j B_i)\right]\\
&= \hat{e}_i\int_0^1 d\lambda\left[2\lambda B_i + \lambda x_j\partial_j B_i\right]
\end{aligned}
$$

将第一项分部积分为：

$$
\begin{aligned}
2\lambda B_i &= \frac{d(\lambda^2 B_i)}{d\lambda} - \lambda^2\frac{dB_i}{d\lambda}\\
\frac{B_i(\lambda\vec{x})}{d\lambda} &= \frac{\partial B_i(\lambda\vec{x})}{\partial(\lambda x_j)}\frac{d(\lambda x_j)}{d\lambda} = \frac{x_j}{\lambda}\partial_j B_i
\end{aligned}
$$

Solution

故：

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \vec{A} &= \hat{e}_i \int_0^1 d\lambda \left[\frac{d(\lambda^2 B_i)}{d\lambda} - \lambda^2 \frac{dB_i}{d\lambda} + \lambda x_j \partial_j B_i \right] \\
&= \lambda^2 \vec{B}(\lambda \vec{x}) \Big|_0^1 \\
&= \vec{B}(\vec{x})
\end{aligned}
$$

理论力学作业 04 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

2. 已知法夫形式

$$\omega \equiv dx + x\,dy + 2xz\,dz$$

(1) 利用弗罗本尼斯定理检验 ω 是否可积。

(2) 是否存在函数 $f(x,y,z)$，使得

$$df = \omega$$

成立？

(3*) 寻找合适的积分因子 $\varphi(x,y,z)$，使得

$$\varphi(x,y,z)\omega \equiv dg(x,y,z)$$

是全微分，并求出 $g(x,y,z) = \int \varphi(x,y,z)\omega$。（这一小题选做，可不答）

提示：（1）可以利用 $d(\varphi\omega) = 0$ 求出 φ 满足的 3 个线性偏微分方程；（2）然后令 $\varphi(x,y,z) \equiv A(x)B(y)C(z)$ 代入微分方程组，求出分离变量解 $\varphi(x,y,z)$；（3）指定 $\varphi(x,y,z)$ 中的积分常数，得到一个比较简单的表达式；（4）对 $\varphi\omega$ 积分，求得 $g(x,y,z)$。

Solution

（1）

$$d\omega = dx \wedge dy + 2zdx \wedge dz$$

$$\begin{aligned}
\omega \wedge d\omega &= (dx + xdy + 2xzdz) \wedge (dx \wedge dy + 2zdx \wedge dz) \\
&= 2xzdz \wedge dx \wedge dy + 2xzdy \wedge dx \wedge dz \\
&= 0
\end{aligned}$$

根据弗罗本尼斯定理知，ω 可积

Solution

（2）由于 $d\omega \neq 0$，故不存在函数 $f(x, y, z)$，使得 $df = \omega$ 成立

（3）

$$
\begin{aligned}
d(\varphi\omega) &= \partial_i \varphi dx_i \wedge \omega + \varphi d\omega \\
&= \partial_x \varphi (xdx \wedge dy + 2xzdx \wedge dz) + \partial_y \varphi (dy \wedge dx + 2xzdy \wedge dz) \\
&\quad + \partial_z \varphi (dz \wedge dx + xdz \wedge dy) + \varphi (dx \wedge dy + 2zdx \wedge dz) \\
&= (x\partial_x \varphi - \partial_y \varphi + \varphi) dx \wedge dy + (2xz\partial_y \varphi - x\partial_z \varphi) dy \wedge dz + \\
&\quad (-2xz\partial_x \varphi + \partial_z \varphi - 2z\varphi) dz \wedge dx \\
&= 0
\end{aligned}
$$

设 φ 有分离变量解，令 $\varphi(x, y, z) \equiv A(x)B(y)C(z)$，代入方程组得：

$$x\frac{A'}{A} - \frac{B'B}{+}1 = 0$$

$$2z\frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$$

$$2xz\frac{A'}{A} - \frac{C'}{C} + 2z = 0$$

从第二个方程入手，有 $\frac{B'}{B} = \frac{C'}{2zC}$，由于方程左边为 y 的函数，右侧为 z 的函数，二者相等只能等于一常数，记为 K_1，得

$$B = B_0 e^{k_1 y}$$

$$C = C_0 e^{k_1 z^2}$$

将 B 的表达式代入第一个方程得到 A 的表达式：

$$A = A_0 x^{k_1 - 1}$$

容易验证 A、C 表达式和第三个方程相容。故

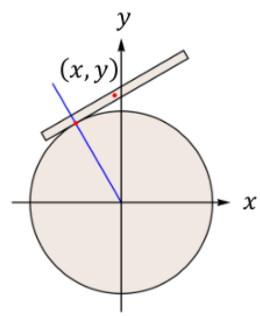
$$\varphi = A \cdot B \cdot C = \varphi_0 x^{k_1 - 1} e^{k_1 y + k_1 z^2}$$

以下两题选做其一：

3. 如图，一均匀薄板厚度可忽略不计，放在一个粗糙的圆柱体上作纯滚动，长方形的一个边与圆柱体的轴向平行。圆柱体的半径为 r，中心位于坐标原点。薄板质心的坐标是 (x, y)，薄板与水平方向的夹角为 θ。

(1) 以 (x, y, θ) 为广义坐标，写出系统满足的 2 个约束方程：1 个代数方程（板与柱面接触）和 1 个微分方程（接触点处无滑动）。

(2) 如果利用几何约束消去 θ，选用 (x, y) 作为广义坐标，写出 (x, y) 满足的约束方程。



Solution

(1) 由于板与柱面接触，接触点为 $(-r\sin\theta, r\cos\theta)$，故

$$\frac{y - r\cos\theta}{x + r\sin\theta} = \tan\theta$$

由于接触点无滑动，即接触点 $(x - l\cos\theta, y - l\sin\theta)$ 切向速度为 0：

$$(dx + ld\theta\sin\theta, dy - ld\theta\cos\theta)\cdot(\cos\theta, \sin\theta) = 0$$

得微分约束：

$$dx\cos\theta + dy\sin\theta = 0$$

(2) 由 (1) 的几何约束得，

$$y\cos\theta - x\sin\theta = r$$

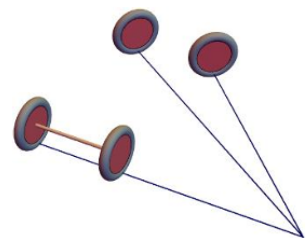
从中反解出：

$$\cos\theta = \frac{yr + x\sqrt{x^2 + y^2 - r^2}}{x^2 + y^2}$$

代入到微分约束中即为 (x,y) 满足的约束方程

4. 四轮小车作平面平行运动。设车体驾驶座相对于地面参考系的直角坐标是 (x,y)，车头朝向与 x-轴的夹角为 θ。

小车的一对前轮为导向轮，后轮为从动轮；导向轮可以相对于车身方向有偏转角，而从动轮则不能。



(1) 阿克曼（Ackman）转向机构能使四个车轮在转向时均作无滑动滚动。写出约束方程。所需的参数，例如前后轮的轴距、一对轮子的轮间距等，可自己引进。

(2) 如果只关心车辆的位置和朝向，请从上一小题得到的方程，导出广义坐标 (x,y,θ) 之间的约束关系。

(3) 广义坐标 (x,y,θ) 满足的约束方程是否完全可积？

(4*) 假设地平面无障碍物，在 $t=0$ 时刻小车的位姿是 (x_0,y_0,θ_0)。小车能否通过运动到达任意状态 (x,y,θ)?（这一小题是拓展思考，可以不答）

Solution

(1) 设驾驶座位于车的正中心，坐标为 (x,y)，轮间距为 2l，前后轮距离为 2L，前轮偏转角为 ψ，轮的半径为 a，第 i 个轮自转的角度为 φ_i.
由无滑滚动条件，对于后轮：

$$d[(x-L\cos\theta, y-L\sin\theta)\pm l(\sin\theta,-\cos\theta)]-ad\varphi_i(\cos\theta,\sin\theta)=0$$

对于前轮：

$$d[(x+L\cos\theta, y+L\sin\theta)\pm l(\sin\theta,-\cos\theta)]-ad\varphi_i(\cos(\theta-\psi),\sin(\theta-\psi))=0$$

即约束方程为：

$$dx+Ld\theta\sin\theta\pm ld\theta\cos\theta-a\cos\theta d\varphi_i=0$$

$$dy-Ld\theta\cos\theta\pm ld\theta\sin\theta-a\sin\theta d\varphi_i=0$$

$$dx-Ld\theta\sin\theta\pm ld\theta\cos\theta-a\cos(\theta-\psi)d\varphi_i=0$$

$$dy+Ld\theta\cos\theta\pm ld\theta\sin\theta-a\sin(\theta-\psi)d\varphi_i=0$$

Solution

（2）对于（1）中第一个约束方程，把 +-两式相比得：

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}=\frac{dx+Ld\theta\sin\theta+ld\theta\cos\theta}{dxLd\theta\sin\theta-ld\theta\cos\theta}$$

同理对于第二个约束方程也有类似式子：

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}=\frac{dy-Ld\theta\cos\theta+ld\theta\sin\theta}{dy-Ld\theta\cos\theta-ld\theta\sin\theta}$$

两式消去 $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$，得

$$\cos\theta dy=\sin\theta dx+Ld\theta$$

（本题若将 (x,y) 设置为两个后轮中点则得到老师讲义上的方程：$\cos\theta dy=\sin\theta dx$）

（3）约束方程的法夫形式为：

$$\omega=\sin\theta dx-\cos\theta dy+Ld\theta$$

$$d\omega=\cos\theta d\theta\wedge dx+\sin\theta d\theta\wedge dy$$

$$\omega\wedge d\omega=dx\wedge d\theta\wedge dy\neq 0$$

故约束方程不完全可积

（4）Chow's theorem: 如果系统 $\dot{q}=\Sigma_i u_i g_i(q)$ 满足：由 g_i,g_j 通过反复取李括号生成的分布在 q_0 的邻域内维数等于 n（系统的完整坐标数）；那么系统是小范围可控的（可以从 q_0 到达任意足够近的点）。

将 (x,y) 设置为两个后轮中点，由 $\cos\theta dy=\sin\theta dx$，可取 $x=v\cos\theta, y=v\sin\theta$，故

$$g_1(q)=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad g_2(q)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad q=(x,y,\theta)^T$$

计算李括号：

$$[g_1,g_2]=\frac{\partial g_2}{\partial q}g_1-\frac{\partial g_1}{\partial q}g_2=0-\begin{pmatrix}0&0&-\sin\theta\\0&0&\cos\theta\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\theta\\-\cos\theta\\0\end{pmatrix}=:g_3(q)$$

计算行列式：

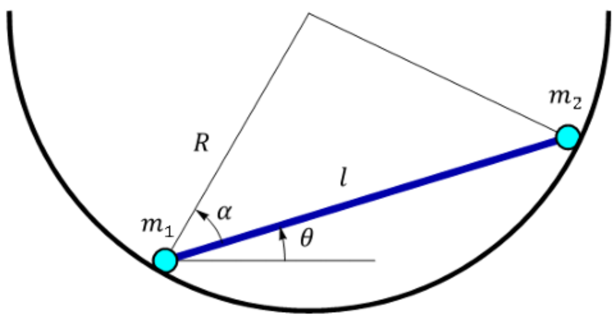
$$\det[g_1,g_2,g_3]=\begin{vmatrix}\cos\theta&0&\sin\theta\\ \sin\theta&0&-\cos\theta\\0&1&0\end{vmatrix}=1\neq 0$$

故系统满足 Chow's theorem，小车可以在给定初始状态下达到任意状态

理论力学作业 06 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

8. 光滑的半球形碗（半径为 R）中，有两个质量分别为 m_1 和 m_2 的小球，小球用长度为 l 的刚性细杆连在一起，杆子的质量可忽略不计。利用虚功原理，求平衡时杆子与水平面的夹角。



Solution

显然只需要考虑如图所示的二维情况即可，同时参数均在图中标出，以 θ 为广义坐标，以向下为 y 轴正方向，原点为球心。

对小球 1:

$$y_1 = R\sin(\alpha + \theta)$$

对小球 2:

$$y_2 = R\sin(\alpha - \theta)$$

只有重力势能为主动力势能，故：

$$V = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 = -m_1 g R\sin(\alpha + \theta) - m_2 g R\sin(\alpha - \theta)$$

由虚功原理，平衡时有：

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial V}{\partial \theta} \\
&= -m_1 g R\cos(\alpha + \theta) + m_2 g R\cos(\alpha - \theta) \\
&= gR\left[\sin\theta(m_1\sin\alpha + m_2\sin\alpha) + \cos\theta(m_2\cos\alpha - m_1\cos\alpha)\right]
\end{aligned}$$

Solution

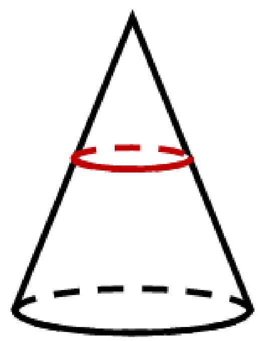
解得：

$$\theta = arctan(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\cot\alpha)$$

又 $\cos\alpha = \frac{l}{2R}$，

$$\theta = arctan(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{l}{\sqrt{4R^2 - l^2}})$$

9. 光滑锥体上套着一根很细的环形橡皮绳。锥体底面朝下垂直放置，半顶角为 α。橡皮绳的自然长度为 l，质量为 m，弹性系数为 k。求橡皮绳的平衡位置。



Solution

设 z 轴正方向竖直向下，原点为圆锥顶部。设平衡时坐标为 z，则此时橡皮绳长度为：

$$L = 2\pi z\tan\alpha$$

重力和弹力均为主动力，故主动力势能为：

$$\begin{aligned}V &= V_G + V_P \\ &= -mgz + \frac{1}{2}k(L-l)^2 \\ &= -mgz + \frac{k}{2}(2\pi z\tan\alpha - l)^2\end{aligned}$$

平衡时：

$$0 = \frac{\partial V}{\partial z} = -mg + 2\pi k\tan\alpha(2\pi z\tan\alpha - l)$$

解得平衡时橡皮绳位置为：

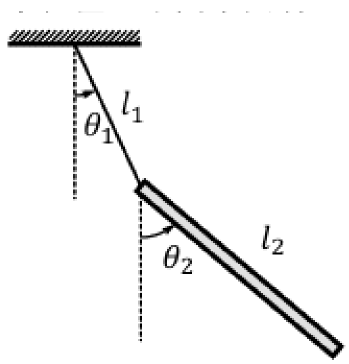
$$z = \frac{mg}{k(2\pi\tan\alpha)^2} + \frac{l}{2\pi\tan\alpha}$$

理论力学作业 08 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

以下两题选做其一：

14. 把一根质量为 m 的均匀细棒，用无弹性的轻绳（忽略质量）栓在天花板上。设细棒和绳子在垂直平面中摆动。写出系统的拉氏量和拉氏方程。



Solution

以图中的 θ_1 和 θ_2 为广义坐标，棒的质心为 $(l_1\cos\theta_1+\frac{1}{2}l_2\cos\theta_2, l_1\sin\theta_1+\frac{1}{2}l_2\sin\theta_2)$，棒的动能为质心动能加上棒绕质心转动的动能：

$$\begin{aligned}T &= \tfrac{1}{2}m\dot{x}_c^2+\tfrac{1}{2}I\dot{\theta}_2^2\\ &= \tfrac{1}{2}m(l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{4}l_2^2\dot{\theta}_2^2+l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2))+\tfrac{1}{24}ml_2^2\dot{\theta}_2^2\\ &= \tfrac{1}{2}ml_1^2\dot{\theta}_1^2+\tfrac{1}{6}ml_2^2\dot{\theta}_2^2+\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\end{aligned}$$

$$V=-mg(l_1\cos\theta_1+\frac{l_2\cos\theta_2}{2})$$

$$L=T-V$$

对 θ_1 有拉格朗日方程：

Solution

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}&=-\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)-mgl_1\sin\theta_1-\frac{d}{dt}\left(ml_1^2\dot\theta_1+\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\\&=-\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)-mgl_1\sin\theta_1-ml_1^2\ddot\theta_1-\tfrac{1}{2}ml_1l_2\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)\\&\quad+\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_2(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\\&=-\frac{1}{2}ml_1l_2\dot{\theta_2}^2\sin(\theta_1-\theta2)-mgl_1\sin\theta_1-ml_1^2\ddot\theta_1-\frac{1}{2}ml_1l_2\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta2)\\&=0\end{aligned}$$

对 θ_2 有拉格朗日方程:

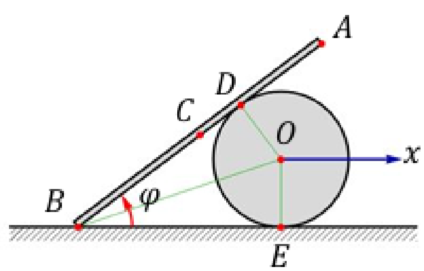
$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \theta_2}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}&=\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)-\tfrac{1}{2}mgl_2\sin\theta_2\\&\quad-\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{3}ml_2^2\dot\theta_2+\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)\right)\\&=\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin(\theta_1-\theta_2)-\tfrac{1}{2}mgl_2\sin\theta_2-\tfrac{1}{3}ml_2^2\ddot\theta_2-\tfrac{1}{2}ml_1l_2\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)\\&+\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_1(\dot\theta_1-\dot\theta_2)\sin(\theta_1-\theta_2)\\&=\tfrac{1}{2}ml_1l_2\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)-\tfrac{1}{2}mgl_2\sin\theta_2-\tfrac{1}{3}ml_2^2\ddot\theta_2-\tfrac{1}{2}ml_1l_2\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)\\&=0\end{aligned}$$

综上，系统拉氏方程为:

$$\frac{1}{2}l_2\dot\theta_2^2\sin(\theta_1-\theta_2)+g\sin\theta_1+l_1\ddot\theta_1+\frac{1}{2}l_2\ddot\theta_2\cos(\theta_1-\theta_2)=0$$

$$\frac{1}{2}l_1\dot\theta_1^2\sin(\theta_1-\theta_2)-\frac{1}{2}g\sin\theta_2-\frac{1}{3}l_2\ddot\theta_2-\frac{1}{2}l_1\ddot\theta_1\cos(\theta_1-\theta_2)=0$$

15. 半径为 a、质量 M 的均匀圆盘，与地面之间作纯滚动。长 l、质量为 m 均匀细棒靠在圆盘上，且棒身与圆盘的接触点处始终没有滑动；另一端与光滑地面接触。以杆与地面的夹角 φ 为广义坐标，写出系统的拉氏函数和运动方程。



Solution

以向右为正方向建立 X 轴，向上为正方向为 y 轴，并将 y 轴原点设为地面，使用图中 φ 作为广义坐标。

则各点坐标为: $O(x_o,a)$,$B(x_B,0)$, $C(x_B+\frac{l}{2}\cos\varphi,\frac{l}{2}\sin\varphi)$, $D(x_B+l_{BD}\cos\varphi,l_{BD}\sin\varphi)$

由几何关系得：$l_{BD}=x_o-x_B$, $(x_o-x_B)\tan\frac{\varphi}{2}=a$，求导得：

$$\dot{x_o}-\dot{x_B}=-\frac{a}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\dot{\varphi}$$

设圆盘顺时针转动角度为 θ，由纯滚动关系得：

$$\dot{x_0}=a\dot{\theta}$$

考虑棒身和圆盘接触点无滑动，即 D 对应棒上点的速度和 D 对应圆盘上点的速度在切向相同，棒上 D 点切向速度为：

$$v=\vec{v_D}\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)=(\dot{x_D}-l_{BD}\sin\varphi\dot{\varphi},l_{BD}\sin\varphi\dot{\varphi})\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)=\dot{x_B}\cos\varphi$$

圆盘上 D 点切向速度为：

$$v=a\dot{\theta}+\dot{x_o}\cos\varphi$$

二者相等，得

$$\dot{x_B}\cos\varphi=\dot{x_o}(\cos\varphi+1)$$

与几何关系式 $\dot{x_o}-\dot{x_B}=-\frac{a}{2}\frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\dot{\varphi}$ 联立可将 $\dot{x_o}$ 和 $\dot{x_B}$ 用广义坐标 φ 表示：

$$\dot{x_o}=\frac{a}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\dot{\varphi}$$

$$\dot{x_B}=a\cot^2\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi}$$

系统总动能包括圆盘质心动能、圆盘绕质心转动动能、棒质心动能、棒绕质心转动动能：

$$\begin{aligned}
T&=\frac{1}{2}M\dot{x}_0^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Ma^2\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m(\dot{x}_c^2+\dot{y}_c^2)+\frac{1}{24}ml^2\dot{\varphi}^2\\
&=\frac{3}{4}M\left(\frac{a}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\dot{\varphi}\right)^2+\frac{1}{24}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\left[(\dot{x_B}-\frac{l}{2}\sin\varphi\dot{\varphi})^2+(\frac{l}{2}\cos\varphi\dot{\varphi})^2\right]\\
&=\frac{3}{4}M\left(\frac{a}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\dot{\varphi}\right)^2+\frac{1}{24}ml^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m\left[a^2\cot^4\frac{\varphi}{2}-al\cot^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi+\frac{l^2}{4}\right]\dot{\varphi}^2\\
&=\dot{\varphi}^2\left(\frac{3}{16}Ma^2\frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\frac{\varphi}{2}}+\frac{1}{6}ml^2+\frac{1}{2}ma^2\cot^4\frac{\varphi}{2}-\frac{1}{2}mal\cot^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right)\\
&\equiv A(\varphi)\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Solution

系统势能只有棒受到的重力势能：

$$V = \frac{l}{2} mg\sin\varphi$$

系统拉氏函数为：

$$L = \dot{\varphi}^2\left(\frac{3}{16}Ma^2\frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{6}ml^2 + \frac{1}{2}ma^2\cot^4\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}mal\cot^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) - \frac{l}{2}mg\sin\varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -\frac{1}{2}mg\cos\varphi + \dot{\varphi}^2\frac{\partial A}{\partial\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 2A\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2\frac{\partial A}{\partial\varphi}$$

计算 $\frac{\partial A}{\partial\varphi}$：

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial\varphi} = &-\frac{3Ma^2}{8}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2} + \cos^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^5\frac{\varphi}{2}} - ma^2\cot^3\frac{\varphi}{2}\csc^2\frac{\varphi}{2}\\ &-\frac{mal}{2}\left(-\cot\frac{\varphi}{2}\csc^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi + \cot^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right)\end{aligned}$$

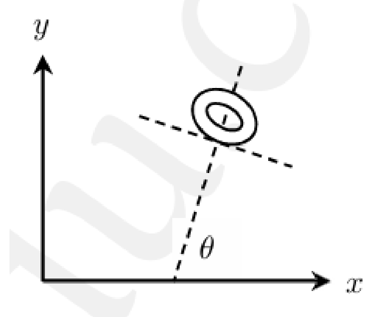
故最终运动方程为：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 2A\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2\frac{\partial A}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}mg\cos\varphi = 0$$

代入 A 和 $\frac{\partial A}{\partial\varphi}$ 表达式：

$$\begin{aligned}&2\left[\frac{3Ma^2\cos^2\varphi}{16\sin^4\frac{\varphi}{2}} + \frac{ml^2}{6} + \frac{ma^2\cot^4\frac{\varphi}{2}}{2} - \frac{mal\cot^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi}{2}\right]\ddot{\varphi}\\ &+\left[-\frac{3Ma^2}{8}\cdot\frac{\cos\varphi\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2} + \cos^2\varphi\cos\frac{\varphi}{2}}{\sin^5\frac{\varphi}{2}} - ma^2\cot^3\frac{\varphi}{2}\csc^2\frac{\varphi}{2}\right.\\ &\left.-\frac{mal}{2}\left(-\cot\frac{\varphi}{2}\csc^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi + \cot^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right)\right]\dot{\varphi}^2 + \frac{mgl\cos\varphi}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

16. 通过引入拉氏乘子，写出讲稿例题直立滚轮问题的运动方程。



Solution

取广义坐标为轮心的位置 (x,y)，轮轴与 x 轴夹角 θ，轮子绕轴转过的角度 φ。
轮子前进方向为 $\theta-\frac{\pi}{2}$，由无滑滚动条件得：

$$\dot{x}-R\cos{(\theta-\frac{\pi}{2})}\dot{\varphi}=0,\quad \dot{y}+R\sin{(\theta-\frac{\pi}{2})}\dot{\varphi}=0$$

写为变分约束：

$$\delta x-R\sin\theta\delta\varphi=0,\quad \delta y+R\cos\theta\delta\varphi=0$$

系统动能包括轮心的动能，轮子绕轴自转的转动动能，和轮子绕竖直轴的转动动能。故系统的拉氏函数为：

$$L=T=\frac{1}{2}M(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2$$

对于变分约束方程 $c_{\alpha k}\delta q_k=0$，带乘子的拉氏方程为：

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q_k}}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=\lambda_\alpha c_{\alpha k}$$

本题中带乘子的拉氏方程为：

$$M\ddot{x}=\lambda_1$$

$$M\ddot{y}=\lambda_2$$

$$I_1\ddot{\varphi}=-R\sin\theta\lambda_1+R\cos\theta\lambda_2$$

$$I_2\ddot{\theta}=0$$

由第四个方程知

$$\theta=\omega_0t+\theta_0$$

对两个约束方程求导得：

$$\ddot{x}=R\sin\theta\ddot{\varphi}+\omega_0R\cos\theta\dot{\varphi}$$

$$\ddot{y}=-R\cos\theta\ddot{\varphi}+\omega_0R\sin\theta\dot{\varphi}$$

Solution

代入拉氏方程得，

$$\lambda_1 = M(R\sin\theta\ddot{\varphi} + \omega_0 R\cos\theta\dot{\varphi})$$

$$\lambda_2 = M(-R\cos\theta\ddot{\varphi} + \omega_0 R\sin\theta\dot{\varphi})$$

$$(I_1 + MR^2)\ddot{\varphi} = 0$$

即 $\varphi = \omega_1 t + \varphi_0$

最后对两个约束方程积分，得

$$x = \int dx = \int R\sin\theta d\varphi = R\int \sin(\omega_0 t + \theta_0)\omega_1 dt = -\frac{\omega_1}{\omega_0}R\cos(\omega_0 t + \theta_0) + c_1$$

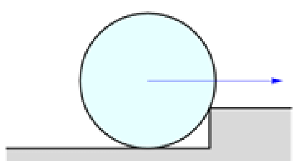
$$y = \int dy = -\int R\cos\theta d\varphi = -\int R\cos(\omega_0 t + \theta_0)\omega_1 dt = -\frac{\omega_1}{\omega_0}R\sin(\omega_0 t + \theta_0) + c_2$$

系统做圆周运动

17. 半径为 r 的圆盘，以速度 v 从左向右无滑滚动，直至碰上高 h 的台阶。设碰撞是弹性的，且 $r > h$。

(1) 如果台阶边缘完全光滑，与圆盘边缘没有摩擦，求圆盘碰撞后的状态。

(2) 若碰撞在中台阶边缘与圆盘有切向滑动，摩擦系数是 μ，求碰撞后的状态。



Solution

(1)

记碰撞时圆盘质心与碰撞点连线与竖直线夹角为 α，满足 $\cos\alpha = \frac{r-h}{r}$。

建立直角坐标系，圆盘质心位置为 (x, y)，碰撞前速度为 $\vec{v} = v\hat{x}$，沿着作用力方向的速度为 $(v\sin^2\alpha, -v\sin\alpha\cos\alpha)$，垂直作用力方向的速度为 $(v\cos^2\alpha, v\cos\alpha\sin\alpha)$。

由纯滚动条件得 $v = r\dot{\theta}$，其中 θ 为圆盘转动角度。

圆盘边缘没有摩擦的碰撞，碰撞时台阶支持力作用于圆盘质心，圆盘不受力矩作用。由于是弹性碰撞，沿着作用力方向的速度反向，垂直于作用力方向速度不变。

故碰撞后，圆盘自转角速度不变仍为 $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$，垂直作用力方向的速度仍为 $(v\cos^2\alpha, v\cos\alpha\sin\alpha)$，沿着作用力方向的速度反向为 $(-v\sin^2\alpha, v\sin\alpha\cos\alpha)$

Solution

因此碰撞后速度为

$$\vec{v} = (v\cos 2\alpha, v\sin 2\alpha)$$

(2)

碰撞时圆盘共受到两部分冲量，一部分为支持力对应的冲量记为 I_1，另一部分为摩擦力对应的冲量记为 I_2。记碰撞点对应圆盘上的点为 D，设 θ 为 D 对应的和竖直方向夹角（以顺时针转动为正方向），则碰撞时 $\theta = -\alpha$。

D 的坐标为：

$$(x - r\sin\theta, y - r\cos\theta)$$

由于圆盘发生碰撞时受到的支持力与（1）中相同，故：

$$\vec{I_1} = \vec{N}\delta(t) = m(v\cos 2\alpha - v, v\sin 2\alpha) = 2mv\sin\alpha(-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

I_2 方向应沿着碰撞点切线方向

$$\vec{I_2} = \mu N\delta(t)\hat{N}_\perp = \mu I_1(\cos\alpha, \sin\alpha) = 2\mu mv\sin\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha)$$

冲量在广义坐标的投影 $I_\alpha = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_\alpha}\cdot\vec{I}$ 为:

$$I_{1x} = -2mv\sin^2\alpha, \quad I_{1y} = 2mv\sin\alpha\cos\alpha$$

$$I_{1\theta} = 2mvr\sin\alpha\sin(\alpha+\theta)$$

$$I_{2x} = 2\mu mv\sin\alpha\cos\alpha, \quad I_{2y} = 2\mu mv\sin^2\alpha$$

$$I_{2\theta} = -2\mu mvr\sin\alpha\cos(\alpha+\theta)$$

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{4}mr^2\dot{\theta}^2$$

根据 $\frac{\partial T}{\partial \dot{q_\alpha}}\Big|_{0-}^{0+} = I_{1\alpha} + I_{2\alpha}$

$$m\dot{x}\Big|_{0-}^{0+} = 2mv\sin\alpha(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$$

$$m\dot{y}\Big|_{0-}^{0+} = 2mv\sin\alpha(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)$$

$$\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}\Big|_{0-}^{0+} = 2mvr\sin\alpha(\sin(\theta+\alpha) - \mu\cos(\theta+\alpha))$$

Solution

又 $\dot{x} = v$,$\dot{y} = 0$,$\dot{\theta} = \frac{v}{r}$，并代入碰撞时 $\theta = -\alpha$，得系统碰撞后状态为

$$\dot{x}(0+) = \mu v \sin 2\alpha + v \cos 2\alpha$$

$$\dot{y}(0+) = 2v \sin\alpha(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)$$

$$\dot{\theta}(0+) = \frac{v}{r}(1 - 4\mu \sin\alpha)$$

理论力学作业 10 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

20. 利用位力定理估算太阳的温度作如下假设：

1. 只考虑万有引力，给出太阳动能均值 $\langle K\rangle$ 与势能均值 $\langle V\rangle$ 的关系。

2. 设太阳是半径为 R_0、质量为 M_0 的均匀球体，写出球体内部的势能函数 $V(r)$。

3. 利用 $V(r)$ 计算 $\langle V\rangle$。

4. 太阳处于等离子体状态，主要是质量由氢离子（质子）贡献，数目约为 $N = M_0/m_p$。

   由能量均分定理，$\langle K\rangle = \frac{3}{2}Nk_BT$。根据前面的结果估算太阳的温度。
   已知常数：

$$M_0 \approx 1.989\times 10^{30}\,\mathrm{kg},\quad R_0 \approx 6.963\times 10^{5}\,\mathrm{km},$$

$$G = 6.67259\times 10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-1}},$$

$$m_p = 1.6726216\times 10^{-27}\,\mathrm{kg},\quad k_B = 1.380649\times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}.$$

Solution

1.
对于引力势，势能是坐标的 (-1) 次函数：

$$V(\lambda\vec{x}_1,\lambda\vec{x}_2,\cdots,\lambda\vec{x}_n) = \lambda^{-1}V(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\cdots,\vec{x}_n)$$

故由位力定理得：

$$\langle K\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle$$

2.
太阳外部的势能相当于质量为 M 的质点作用产生的，对于质量为 m 的检测粒子，$V(R) = -\frac{GMm}{R}$，记太阳的体密度为 ρ，则太阳内部的势能为：

$$\begin{aligned}V(r) &= V(R) - \int_R^r \frac{Gm\rho\frac{4\pi r^3}{3}}{r^2}dr\\ &= \frac{GMm}{R}\left(\frac{r^2}{2R^2} - \frac{3}{2}\right)\end{aligned}$$

Solution

3.

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}\int \frac{V(r)}{m}dm$$

式中 $\frac{1}{2}$ 为防止重复计算势能的系数

$$\langle V\rangle = \frac{1}{2}\int_0^R \frac{V(r)}{m}\cdot\rho\cdot 4\pi r^2 dr$$

代入 $V(r)$ 和 ρ：

$$\begin{aligned}\langle V\rangle &= \frac{1}{2}\int_0^R \left[-\frac{GM}{R}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right)\right]\cdot\frac{3M}{4\pi R^3}\cdot 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{3GM^2}{2R^4}\int_0^R\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\frac{r^2}{R^2}\right)r^2 dr \\ &= -\frac{3GM^2}{2R^4}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{r^3}{3}-\frac{1}{2R^2}\cdot\frac{r^5}{5}\right]_0^R \\ &= -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R}\end{aligned}$$

4.

合并以上三问结果：

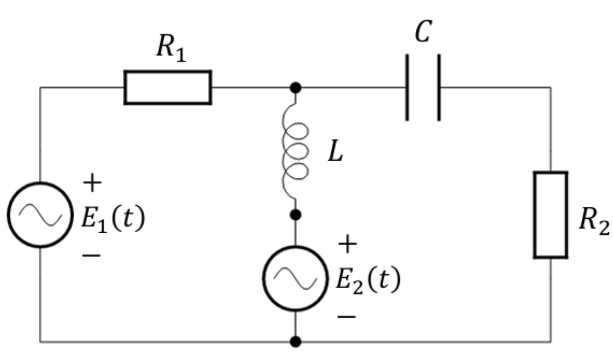
$$\langle K\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle$$

$$\frac{3}{2}Nk_BT = \frac{3}{10}\frac{GM^2}{R}$$

代入数据解得

$$T = \frac{GMm_p}{5Rk_B}\approx 4.62\times 10^6 K$$

21. 用拉格朗日力学的方法，写出下图电路的电路方程。



Solution

记电流 i_1 为从上至下通过 L 的电流，电流 i_2 为从上至下通过 R_2 的电流，e_1、e_2 与 i_1、i_2 对应。故该电路系统对应的拉氏函数为：

$$L = \frac{1}{2}Li_1^2 - (\frac{e_2^2}{2C} - E_1(e_1 + e_2) + E_2e_1)$$

瑞利耗散函数为

$$G = \frac{1}{2}R_2i_2^2 + \frac{1}{2}R_1(i_1 + i_2)^2$$

电路方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial i_\alpha} - \frac{\partial L}{\partial e_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial i_\alpha} = 0$$

即

$$L\ddot{e}_1 + R_1(\dot{e}_1 + \dot{e}_2) - E_1 + E_2 = 0$$

$$R_1\dot{e}_1 + (R_1 + R_2)\dot{e}_2 + \frac{1}{C}e_2 - E_1 = 0$$

理论力学作业 12 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

3. 求本章习题 1 牛顿最小阻力体问题中泛函 $F[y]$ 的变分。
（提示： 不要 copy 某些数学论文或物理书中的泛函，由于未考虑顶端平面，这些泛函表达式并不正确； 注意这是可动边界的变分。）

Solution

习题一得到的泛函为：

$$F[y] = 2\pi\rho u^2[r^2 + \int_r^R \frac{2x}{1+y'^2}dx]$$

该泛函对应的变分是边界有约束的可动边界变分，（可以直接套用老师讲义中 23、24 页关于有约束的可动边界变分的公式，这里再进行一次推导）。令 $L(x,y') = \frac{2x}{1+y'^2}$
变分：

$$\delta F = 2\pi\rho u^2\left[2r\delta r + \delta\int_r^R L(x,y')dx\right]$$

对积分项变分：

$$\begin{aligned}
\delta\int_r^R L(x,y')dx &= \int_r^R \delta L dx - \int_r^{r+\delta r} L dx \\
&= -L(r)\delta r + \int_r^R \left(\frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y'\right)dx \\
&= -L(r)\delta r + \int_r^R \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' dx
\end{aligned}$$

对第二项分部积分：

$$\int_r^R \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' dx = \left[\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\right]_{x=r}^{x=R} - \int_r^R \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\delta y dx$$

边界有约束的可动边界的边界条件：

- $x=R$：$y(R)=0$ 固定 $\Rightarrow \delta y(R)=0$
- $x=r$：$y(r) = (y+\delta y)(r+\delta r) = y(r+\delta r)+\delta y(r) = y(r)+y'(r)\delta r+\delta y(r)$，得 $\delta y = -y'(r)\delta r$

Solution

边界项：

$$\left[\frac{\partial L}{\partial y'}\delta y\right]_r^R = 0 - \frac{\partial L}{\partial y'}(r)\cdot[-y'(r)\delta r] = y'(r)\frac{\partial L}{\partial y'}(r)\delta r$$

合并 δr 项：

$$2r\delta r - L(r)\delta r + y'(r)\frac{\partial L}{\partial y'}(r)\delta r = \left[2r - L(r) + y'(r)\frac{\partial L}{\partial y'}(r)\right]\delta r$$

代入 $L(x) = \frac{2x}{1+y'^2}$，$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{-4xy'}{(1+y'^2)^2}$，$\frac{d}{dx}\left(\frac{-4xy'}{(1+y'^2)^2}\right) = \frac{-4y'}{(1+y'^2)^2} - 4xy''\frac{1-3y'^2}{(1+y'^2)^3}$：
最终变分表达式

$$\delta F[y] = 2\pi\rho u^2\left[\left(2r - \frac{2r}{1+y'^2} - \frac{4r(y')^2}{(1+y'^2)^2}\right)\delta r - \int_r^R \frac{d}{dx}\left(\frac{-4xy'}{(1+y'^2)^2}\right)\delta y dx\right]$$

若使用的坐标系与恰好相反，即交换 x,y，y(0)=r, 则得到的泛函为：

$$F[y] = 2\pi\rho u^2[r^2 + \int_0^L \frac{2yy'^3}{1+y'^2}dx]$$

其变分为固定边界但边界函数值不固定的泛函的变分，记 $L = \frac{2yy'^3}{1+y'^2}$：

$$\begin{aligned}
\delta F[y] &= 2\pi\rho u^2[2r\delta r + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y|_0^L + \int_0^L (\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'})\delta y dx] \\
&= 2\pi\rho u^2\left[2r\delta r - \frac{2yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2}|_{x=0}\delta r + \int_0^L\left(\frac{2y'^3}{1+y'^2} - \frac{d}{dx}\frac{2yy'^2(3+y'^2)}{(1+y'^2)^2}\right)\delta y dx\right] \\
&= 2\pi\rho u^2\left[2r\delta r - \frac{2ry'^2(0)(3+y'^2(0))}{(1+y'^2(0))^2}\delta r + \int_0^L\left(-\frac{4y'^3}{(1+y'^2)^2} - \frac{4y'(3-y'^2)}{(1+y'^2)^3}yy''\right)\delta y dx\right]
\end{aligned}$$

4. 一条固定长度的封闭曲线，在平面上能圈出最大面积时的形状是圆形。

要利用变分法证明这个结论，需要先写出面积 S、周长 L 与曲线形状的关系。设平面曲线的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t\in[0,1]$$

曲线是封闭的，即

$$x(0) = x(1), \quad y(0) = y(1)$$

（1）写出泛函 $S[x,y]$ 和 $L[x,y]$。

（2）计算变分 δS 和 δL。与前面的同题一样，可以利用分部积分化简你的计算结果。

Solution

(1)

面积泛函（用格林公式）：

$$S[x,y] = \frac{1}{2}\oint (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_0^1 (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\,dt$$

其中 $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$。

周长泛函：

$$L[x,y] = \oint ds = \int_0^1 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt$$

(2) 这两个泛函均为二宗量泛函，令 $F_S = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$，则：

$$\delta S = \frac{1}{2}\int_0^1 [\dot{y}\delta x + x\delta\dot{y} - \dot{x}\delta y - y\delta\dot{x}]\,dt$$

对含 $\delta\dot{x}, \delta\dot{y}$ 的项分部积分

$$\int_0^1 x\delta\dot{y}\,dt = [x\delta y]_0^1 - \int_0^1 \dot{x}\delta y\,dt$$
$$\int_0^1 y\delta\dot{x}\,dt = [y\delta x]_0^1 - \int_0^1 \dot{y}\delta x\,dt$$

由于 $x(0) = x(1)$,$y(0) = y(1)$，边界项为零：

$$[x\delta y]_0^1 = x(1)\delta y(1) - x(0)\delta y(0) = 0, \quad [y\delta x]_0^1 = 0$$

因此

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{1}{2}\int_0^1 [\dot{y}\delta x - \dot{x}\delta y - \dot{x}\delta y + \dot{y}\delta x]\,dt \\ &= \int_0^1 (\dot{y}\delta x - \dot{x}\delta y)\,dt\end{aligned}$$

令 $F_L = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$，记 $v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$，则：

$$\delta L = \int_0^1 \left[\frac{\partial F_L}{\partial \dot{x}}\delta\dot{x} + \frac{\partial F_L}{\partial \dot{y}}\delta\dot{y}\right] dt = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta\dot{x} + \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta\dot{y}\right) dt$$

对两项分别进行分部积分：

$$\int_0^1 \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta\dot{x}\,dt = \left[\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\delta x\,dt$$

Solution

$$\int_0^1 \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta\dot{y}\,dt = \left[\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\delta y\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\delta y\,dt$$

由于 $x(0)=x(1)$,$y(0)=y(1)$，边界项为零：

故：

$$\begin{aligned}\delta L &= -\int_0^1 \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\delta x + \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right)\delta y\right]dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{\dot{y}(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})\delta x + \dot{x}(\dot{y}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{y})\delta y}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2}}\right]dt\end{aligned}$$

5. 伽利略、欧拉和牛顿等多位科学家曾设想过一种重力隧道：把地球表面的地点 A 和 B，通过细长的地下通道相连。在通道中铺上铁轨。设列车在铁轨上无摩擦地运动，则在重力作用下，列车可以从 A 滑行到 B。

（1）列车所需的运行时间 τ 是隧道形状 $r(\theta)$ 的泛函，写出表达式

$$\tau[r] = \int_{-\alpha}^{\alpha} F(r,r')\,d\theta, \quad r' \overset{\text{def}}{=} \frac{dr}{d\theta}$$

（2）这里的广义能量积分

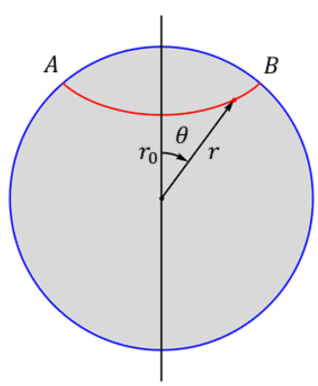
$$E = \frac{\partial F}{\partial r'}r' - F$$

是常数。该轨道最低点到地心的距离是 r_0，确定常数 E。

（3）利用广义能量积分解出 $dr/d\theta$，然后代入 $\tau[r]$ 的表达式以消去 θ 变量，积分求出列车所需的总运行时间 $\tau(r_0)$。所需积分公式可在数学手册中查找。

（4）利用 $dr/d\theta$ 表达式，积分求出 $\theta(r)$。

（5）利用 $\theta(r)$ 求出 A、B 两点在地球表面的距离 s，给出列车耗时 $\tau(s)$。



Solution

1.

设地球半径 R，质量 M，对应重力势能（地表为零点）

$$U(r) = -\int_R^r -\frac{GMm}{r^2}dr = \frac{GMm}{2R^3}(R^2 - r^2).$$

由能量守恒（从地表静止释放）

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{GM}{R^3}(R^2 - r^2).$$

速度 $v = \dfrac{ds}{dt}$，弧长 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\theta$。

所以运行时间

$$\tau[r] = \int dt = \int \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, d\theta.$$

2.

令

$$F(r, r') = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{R^2 - r^2}}.$$

因为 F 不显含 θ，由 Beltrami identity

$$E = \frac{\partial F}{\partial r'} r' - F = \text{常数}.$$

计算

$$\frac{\partial F}{\partial r'} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} \cdot \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

所以

$$E = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r'^2}{\sqrt{R^2 - r^2}\sqrt{r^2 + r'^2}} - \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{R^2 - r^2}} = -\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

在最低点 $r = r_0$，$r' = 0$，代入得

$$E = -\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}}.$$

3.

由 E 的表达式

$$-\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r^2}{\sqrt{R^2 - r^2}\sqrt{r^2 + r'^2}} = -\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \frac{r_0}{\sqrt{R^2 - r_0^2}}.$$

Solution

解得

$$r'^2=\frac{r^4(R^2-r_0^2)}{r_0^2(R^2-r^2)}-r^2=\frac{R^2r^2(r^2-r_0^2)}{r_0^2(R^2-r^2)}$$

故

$$\frac{dr}{d\theta}=r'=\frac{Rr\sqrt{r^2-r_0^2}}{r_0\sqrt{R^2-r^2}}$$

代入 $\tau[r]$

$$\tau(r)=\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\sqrt{r^2+r'^2}}{\sqrt{R^2-r^2}}\,d\theta=\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{r^2\sqrt{R^2-r_0^2}}{r_0(R^2-r^2)}\,d\theta.$$

又 $d\theta=\dfrac{dr}{r'}=\dfrac{r_0\sqrt{R^2-r^2}}{Rr\sqrt{r^2-r_0^2}}\,dr$

$$\begin{aligned}\tau(r_0)=&\sqrt{\frac{R^3}{GM}}\cdot 2\int_{r_0}^{R}\frac{r^2\sqrt{R^2-r_0^2}}{r_0(R^2-r^2)}\cdot\frac{r_0\sqrt{R^2-r^2}}{Rr\sqrt{r^2-r_0^2}}\,dr\\ =&\,2\sqrt{\frac{R(R^2-r_0^2)}{GM}}\int_{r_0}^{R}\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{r^2-r_0^2}}\,dr\end{aligned}$$

由于 $\int_{r_0}^{R}\dfrac{r}{\sqrt{R^2-r^2}\sqrt{r^2-r_0^2}}\,dr=\dfrac{\pi}{2}$，故

$$\tau(r_0)=\pi\sqrt{\frac{R(R^2-r_0^2)}{GM}}$$

4.

由第三问得：

$$\frac{dr}{d\theta}=r'=\frac{Rr\sqrt{r^2-r_0^2}}{r_0\sqrt{R^2-r^2}}$$

解微分方程得：

$$\theta(r)=\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2-r_0^2}}{r_0}\sqrt{\frac{r^2-r_0^2}{R^2-r^2}}\right)-\frac{r_0}{R}\arcsin\left(\sqrt{\frac{r^2-r_0^2}{R^2-r_0^2}}\right)$$

5.

地表两点间的大圆弧距离：

$$s=2R\alpha$$

由第 (4) 问，在 $r=R$ 时，$\alpha=\theta(R)$，代入 $\theta(r)$ 公式：

Solution

$$\alpha = -\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{R^2 - r_0^2}}{r_0}\sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - R^2}}\right) - \frac{r_0}{R}\arcsin\left(\sqrt{\frac{R^2 - r_0^2}{R^2 - r_0^2}}\right)\right] = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)$$

地表距离：

$$s = 2R\alpha = \pi R\left(1 - \frac{r_0}{R}\right)$$

由第 (3) 问结果：

$$\tau(r_0) = \pi\sqrt{\frac{R(R^2 - r_0^2)}{GM}}$$

将 $r_0 = R\left(1 - \frac{s}{\pi R}\right)$ 代入：

$$\tau(s) = \sqrt{\frac{R}{GM}}\sqrt{2\pi Rs - s^2}$$

理论力学作业 14 参考答案

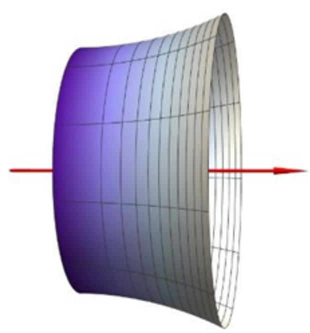
助教：张积翔、于洪飞

第 10-13 题选做其二，第 14 题必做：

10.

考虑 xy-平面上的两个固定点 A、B，用一条曲线 $y = y(x)$ 连接两点，然后将曲线绕 x 轴旋转一周得到旋转曲面。

1. 写出旋转曲面的面积 $S[y]$，求面积最小的形状。
2. $\delta S[y] = 0$ 确定的极值曲面，默认了母线 $y(x)$ 不是多值函数且没有角点，这有可能导致漏解。如果母线在两端有一段是垂直于对称轴（这时母线是多值函数）线段，那么极小曲面的形状是什么样的？



Solution

旋转曲面的面积表达式为：

$$S[y] = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y(x)\sqrt{1+(y')^2}\,dx, \quad y' = \frac{dy}{dx}.$$

设被积函数为：

$$F(y, y') = y\sqrt{1+(y')^2}.$$

对应的 Euler–Lagrange 方程为：

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

Solution

$$\sqrt{1+(y')^2}-\frac{d}{dx}\left[\frac{yy'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right]=0$$

方程较为复杂，考虑用广义能量化简问题。由于 F 不显含 x，故广义能量守恒：

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=C,$$

代入 F 及其偏导，解得：

$$-\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}}=C$$

即：

$$(y')^2=\frac{y^2}{C^2}-1$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C^2}-1}}=\pm dx.$$

令 $y=C\cosh t$，则 $dy=C\sinh t\,dt$，($\pm$ 号融入常数 C 中)，代入得：

$$\frac{C\sinh t\,dt}{\sinh t}=C\,dt=dx\quad\Rightarrow\quad x=Ct+a.$$

$$y=C\cosh\left(\frac{x-a}{C}\right).$$

因此面积最小的旋转曲面形状为悬链面，其母线为悬链线，式中常数由固定端点决定。

2、

若考虑母线在左端即 $x=x_1$ 处垂直于对称轴且 $y(x_1)$ 从 y_1 到 y_3，母线在右端即 $x=x_2$ 处垂直于对称轴且 $y(x_2)$ 从 y_2 到 y_4，连接左右端的曲线从 (x_1,y_3) 到 (x_2,y_4) 相连，则面积泛函为：

$$S[y]=\pi(y_1^2-y_3^2)+\pi(y_2^2-y_4^2)+2\pi\int_{x_1}^{x_2}y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

由边界函数值不固定的变分得：

$$\delta S=-2\pi y_3\delta y_3-2\pi y_4\delta y_4+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'})\delta y dx=0$$

从而有边界条件：

$$2\pi y_3+\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_1}=0$$

$$2\pi y_4+\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=x_2}=0$$

Solution

和欧拉方程

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

由边界条件方程解得 $y_3 = y_4 = 0$，而欧拉方程的解我们知道是悬链线。

但是在这种情形下，旋转曲面形状在左右端点均为垂直于对称轴的圆盘，所以显然连接左右端点的中间部分应当为 $y = 0$ 面积最小（让我们重新审视欧拉方程，$y = 0$ 确实为其解，这是因为我们解得悬链线时默认了广义能量不为零）。

综上，当我们考虑母线两端均有一段垂直于对称轴时，极值曲面" 塌缩" 为两个分立的圆盘，只需将两个圆盘的面积和悬链线围出的面积比较即可得到全局最小曲面。

11.

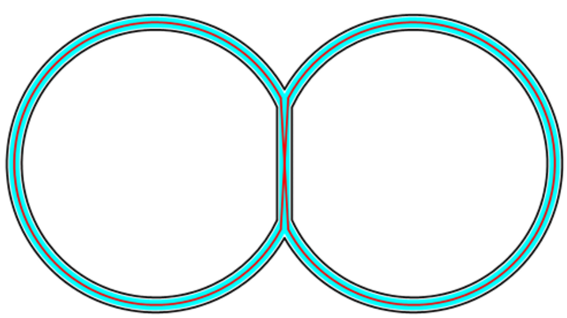
英国物理学家 P.A.M. Dirac 预言的磁单极子（monopole），带有磁荷（magnetic charge）

$$g = n\frac{hc}{2e}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

可以用超导线圈探测磁单极子。由于超导线圈完全抗磁，磁单极子穿过超导线圈后，线圈中会留下永久电流；磁单极子从线圈外穿过，则不会产生稳定的电流。通常使用量子超导干涉仪（SQUID）来检测超导线圈中的微小电流。

环形超导线圈抗干扰能力弱，环境磁场的扰动（扰动后稳定较长时间）同样能在线圈中产生电流，产生虚假信号。IBM 改进后的超导线圈，形状为对称“8”字形，环境磁场的均匀改变，在线圈的两个区域内磁通相反，不会引起线圈中的电流变化。

线圈必须放在装有液氦的管中以保持低温。管道越长，耗电越多。为了节省长期运行费用，我们需要用最短的管子围出最大的面积。请设计“8”字形管的最佳形状。



Solution

以图形的中心为原点建立直角坐标系，由于对称性我们只需考虑第一象限。曲线分为两段，一段为 x=0 处垂直于 x 轴的垂线并记最高点为 $y(0)=y_0$，一段则为弧线并记 $y(x_2)=0$。

设管子长度恒定，注意管子中间部分被左右两侧共用，故记 $\frac{y_0}{2}+s=L$ 为常数，其中 L 为总长度的四分之一，$s=\int_0^{x_2}\sqrt{1+y'^2}dx$ 为第一象限圆弧长度。

第一象限的面积泛函为：

$$S[y]=\int_0^{x_2} ydx$$

定义拓展泛函为：

$$\Psi=S+\lambda L=\frac{\lambda y_0}{2}+\int_0^{x_2}(y+\lambda\sqrt{1+y'^2})dx$$

记 $F=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$，对拓展泛函进行变分，应注意右端边界 x_2 不固定，变分为边界有约束的可动边界变分：

$$\delta\Psi=\frac{\lambda\delta y_0}{2}+\left[(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'})\Delta x+\frac{\partial F}{\partial y'}\Delta y\right]\Big|_0^{x_2}+\int_0^{x_2}(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'})\delta ydx=0$$

即

$$\delta\Psi=\frac{\lambda\delta y_0}{2}+(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'})\Big|_{x_2}\Delta x_2-\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=0}\delta y_0+\int_0^{x_2}(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'})\delta ydx=0$$

我们得到如下方程：

在 x=0 处，

$$\frac{\lambda}{2}-\frac{\partial F}{\partial y'}\Big|_{x=0}=0$$

代入 $\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$，得

$$y'(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

在 $x=x_2$ 处，

$$(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'})\Big|_{x_2}=0$$

即 $\frac{\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}=0$，因此我们取

$$y'|_{x_2}=-\infty$$

表明在 x_2 处曲线垂直于 x 轴。

由欧拉-拉格朗日方程：

$$1-\frac{d}{dx}\left[\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]=0$$

Solution

故
$$\lambda\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x+C$$
由于我们在上面解得 $y'(0)=\frac{1}{\sqrt{3}}$，代入得 $C=-\frac{\lambda}{2}$ 令：
$$u=x-\frac{\lambda}{2},\quad k=\frac{1}{\lambda}$$
则 (2) 式化为：
$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=ku$$
两边平方：
$$\frac{y'^2}{1+y'^2}=k^2u^2$$
$$y'^2=\frac{k^2u^2}{1-k^2u^2}$$
由于曲线下降，取负号：
$$y'=-\frac{ku}{\sqrt{1-k^2u^2}}$$
积分求 y：
$$y=\int-\frac{ku}{\sqrt{1-k^2u^2}}\,du=\frac{1}{k}\sqrt{1-k^2u^2}+a$$
即：
$$y=\sqrt{\lambda^2-(x-\frac{\lambda}{2})^2}+a$$
故弧线为圆弧。代入 $x=0$ 时 $y=y_0$ 和 $x=x_2$ 时 y=0 且弧线与 x 轴垂直，得 $y_0=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, a=0$，所以弧线方程为
$$(x-\frac{y_0}{\sqrt{3}})^2+y^2=\frac{4}{3}y_0^2$$
再由管子长度恒定，$\frac{y_0}{2}+s=L$，$s=\frac{2}{3}\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}y_0$，得 $y_0=\frac{L}{\frac{1}{2}+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$

综上，最佳形状为：$y_0=\frac{L}{\frac{1}{2}+\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}}$，弧线为圆弧且圆心位于 $(\frac{y_0}{\sqrt{3}},0)$ 半径为 $\frac{2}{\sqrt{3}}y_0$

12.

在 1489 年-1490 年，意大利的达芬奇（Leonardo da Vinci）创作了名画《抱银貂的女子》（Lady with an Ermine）。这期间他思考过一个问题：固定项链的两端，使其在重力的作用下自然下垂，那么项链所形成的曲线是什么？

这是悬链线问题。达芬奇未能得到正确的形状，直到约翰·伯努利在 1696 年以此问题向欧洲的数学家们发起公开挑战。

考虑项链上串着一个坠子的情形：均匀链子上穿着一个小重物，重物可在绳子上自由滑动。固定链子的两端，求此悬链形状满足的方程和边界条件。

Solution

本题为有约束的、有角点的泛函问题：

链子势能：

$$U_{\text{chain}} = \rho g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

设重物 m 位于 $x=c$ 处重物势能：

$$U_{\text{mass}} = mg\,y(c)$$

总势能泛函：

$$U[y] = \rho g \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx + mg\,y(c)$$

约束条件（链长固定）：

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(y')^2}\,dx = L$$

引入拉格朗日乘子 λ，构造泛函：

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\rho g y\sqrt{1+(y')^2} + \lambda\sqrt{1+(y')^2}\right] dx + mg\,y(c)$$

记：

$$F(y,y') = (\rho g y + \lambda)\sqrt{1+(y')^2}$$

故泛函变分为（注意角点 x=c，参考讲义关于带角点泛函的变分）：

$$\delta J[y] = -\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Bigg|_{c^-}^{c^+}\Delta c + \left(-\frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{c^-}^{c^+} + mg\right)\Delta y(c) + \int_{x_1}^{c}\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}\delta y(x)\,dx$$
$$+ \int_{c}^{x_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}\delta y(x)\,dx$$

由此我们得到分段的欧拉方程，以及在点 x=c 处致极曲线满足的 Weierstrass-Erdmann 角点条件：

$$\frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{c^+} - \frac{\partial F}{\partial y'}\Bigg|_{c^-} = mg$$

$$\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Bigg|_{c^-} = \left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\Bigg|_{c^+}$$

Solution

代入 F 的形式 $F(y,y')=(\rho gy+\lambda)\sqrt{1+(y')^2}$，得

$$(\rho gy+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\bigg|_{c^+}-(\rho gy+\lambda)\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\bigg|_{c^-}=mg$$

$$\frac{\rho gy+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{c^-}=\frac{\rho gy+\lambda}{\sqrt{1+y'^2}}\bigg|_{c^+}$$

由于角点 c 两侧的 y 连续，故由第二个角点条件只 $y'|_{c^+}=-y'|_{c^-}$ 由于 F 不显含 x，故广义能量守恒：

$$y'\frac{\partial F}{\partial y'}-F=-\frac{\rho gf+\lambda}{\sqrt{1+f'^2}}=-C$$

C 为常数，故第一个角点条件可写为：

$$y'|_{c^+}-y'|_{c^-}=\frac{mg}{C}$$

故角点两侧的边界条件为

$$y'|_{c^-}=\frac{mg}{2C}=-y'|_{c^+}$$

在角点两侧曲线满足欧拉拉格朗日方程，为了简便，我们采用广义能量来解曲线方程：

$$\frac{\rho gf+\lambda}{\sqrt{1+f'^2}}=C$$

$$y'=\pm\sqrt{\left(\frac{\rho gy+\lambda}{C}\right)^2-1}$$

令 $u=\rho gy+\lambda$，$du=\rho g\,dy$：

$$dx=\pm\frac{dy}{\sqrt{\frac{u^2}{C}-1}}=\pm\frac{C}{\rho g}\frac{du}{\sqrt{u^2-C^2}}$$

积分：

$$x+c_2=\pm\frac{C}{\rho g}\ln\left(u+\sqrt{u^2-C^2}\right)$$

即：

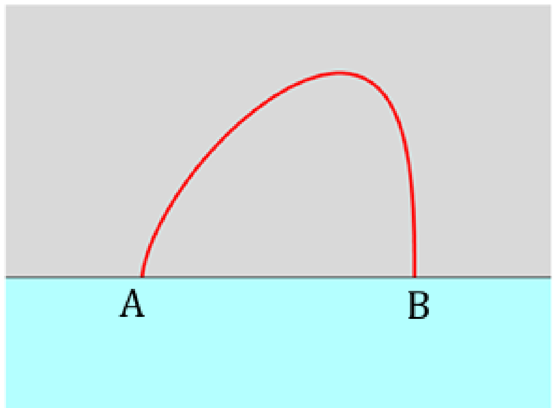
$$x+c_2=\pm\frac{C}{\rho g}\ln\left(\rho gy+\lambda+\sqrt{(\rho gy+\lambda)^2-C^2}\right)$$

可化为悬链线形式 $y=\frac{1}{a}\cosh(ax+b)+y_0$。

综上，角点两侧均为悬链线，角点两侧的边界条件为 $y'|_{c^-}=\frac{mg}{2C}=-y'|_{c^+}$。两条悬链线共六个未知常数，可通过两个固定端点、长度固定、角点连续、角点两侧的导数这六个条件决定。

13. Dido’ s Problem

在古希腊传说中，腓尼基城邦泰尔发生叛乱之后，公主狄多与随从逃到北非的突尼斯，向雅布王请求能用一块牛皮围起来的土地。在得到允诺之后，她把牛皮剪成细绳，沿着海边圈占一大块土地，建立了迦太基城成为女王。狄多问题是一个可动边界的条件极值问题：



1. x-轴上有两点 A、B（可在轴上变动），连接 AB 两点的曲线为

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

   如果曲线的长度固定为 l_0，欲使曲线和 x-轴所包围的区域面积最大，求曲线形状。

2. 若 $|AB| = a$ 为固定值，求曲线形状。

3. 若面元的价值为 $\rho(x, y)\,dx\,dy > 0$，欲使所围的面积价值最大，求曲线满足的微分方程和边界条件。

4. 如果下方的边界不是 x-轴，而是曲线 $y = \varphi(x)$，求围取最大价值面积的曲线所满足的微分方程和边界条件。

Solution

1.

取曲线参数化 $(x(t), y(t))$，$t \in [t_1, t_2]$，$y(t) \geq 0$。

面积（曲线与 x-轴之间）：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$$

长度约束：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\,dt = l_0$$

Solution

引入拉格朗日乘子 λ，定义泛函：

$$J[x,y]=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt$$

其中

$$F=y\dot{x}+\lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

对泛函变分得欧拉-拉格朗日方程和自然边界条件：
对宗量 x：

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}=0$$

所以：

$$-\frac{d}{dt}\left[y+\lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right]=0$$

$$y+\lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=C_1\quad(\text{常数})$$

对宗量 y：

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}=0$$

所以：

$$\dot{x}-\frac{d}{dt}\left[\lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right]=0$$

端点 A,B 在 x-轴上可动 (因此有自然边界条件)，即：

- $y(t_1)=0$，$y(t_2)=0$（固定）
- $x(t_1),x(t_2)$ 自由

对 x 的自然边界条件：

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1,t_2}=0$$

在端点 $y=0$，得：

$$\left.\lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right|_{t_1,t_2}=0$$

若 $\lambda\neq 0$，则：

$$\dot{x}(t_1)=0,\quad \dot{x}(t_2)=0$$

即曲线在端点处切线垂直（平行于 y-轴）。
下面求解方程。为简便计算，我们取弧长参数 s，则：

Solution

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \cos\theta(s), \quad \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \sin\theta(s)$$

欧拉-拉格朗日方程化为：

$$y + \lambda\cos\theta = C_1$$

$$\cos\theta - \frac{d}{ds}(\lambda\sin\theta) = 0$$

故：

$$\cos\theta - \lambda\cos\theta\cdot\theta' = 0$$

$$1-\lambda\theta' = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta' = \frac{1}{\lambda} \quad (\text{常数})$$

曲率恒定，故为圆弧。又上面我们根据自然边界条件解得曲线在端点处与 x 轴垂直，故曲线为半圆。

2.

若 $|AB| = a$ 为固定值，与 (1) 问中相同，只不过端点处 x 也固定，自然边界条件消失，但曲线满足相同的微分方程。

因此曲线形状为圆弧。

3.

面积泛函获得权重 $\rho(x,y)$，故与 (1) 中类似：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \rho(x,y)y(t)\,\dot{x}(t)\,dt$$

长度约束：

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt = l_0$$

引入拉格朗日乘子 λ，定义泛函：

$$J[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt$$

其中

$$F = \rho(x,y)y\dot{x} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

容易解得自然边界条件与 (1) 中相同：

$$\dot{x}(t_1) = 0, \quad \dot{x}(t_2) = 0$$

即曲线在端点处切线垂直（平行于 y-轴）。

Solution

欧拉-拉格朗日方程则为：

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = 0$$

即

$$\rho_x y\dot{x} - \frac{d}{dt}\left[\rho y + \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right] = 0$$
$$(\rho+\rho_y y)\dot{x} - \frac{d}{dt}\left[\lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right] = 0$$

边界条件为: $\dot{x}(t_1)=0, \quad \dot{x}(t_2)=0, \quad y(t_1)=0, \quad y(t_2)=0$

4.

下方的边界不是 x 轴，而是曲线 $y=\varphi(x)$，则面积泛函变为：

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \rho(x,y)(y-\varphi(x))\,\dot{x}(t)\,dt$$

引入拉格朗日乘子 λ 后的泛函：

$$J[x,y] = \int_{t_1}^{t_2} F(t,x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt$$

其中

$$F = \rho(x,y)(y-\varphi(x))\dot{x} + \lambda\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$

对 x 的自然边界条件 $\left.\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{t_1,t_2} = 0$ 得：

$$\rho(y-\varphi(x))\left.\frac{\lambda\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right|_{t_1,t_2} = 0$$

由于端点处 $y=\varphi(x)$，故边界条件仍为：

$$\dot{x}(t_1)=0, \quad \dot{x}(t_2)=0, \quad y(t_1)=\varphi(x(t_1)), \quad y(t_2)=\varphi(x(t_2))$$

欧拉-拉格朗日方程则为：

$$\rho_x[y-\varphi(x)]\dot{x} - \rho\varphi'(x)\dot{x} - \frac{d}{dt}\left[\rho[y-\varphi(x)] + \lambda\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right] = 0$$
$$\rho_y[y-\varphi(x)]\dot{x} + \rho\dot{x} - \frac{d}{dt}\left[\lambda\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right] = 0$$

14.

对第二章直立滚轮的例子，如果取扩展拉氏函数

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \lambda_1(t)(\dot{x} - R\sin\theta\dot{\varphi}) + \lambda_2(t)(\dot{y} + R\cos\theta\dot{\varphi})$$

则得到的欧拉-拉格朗日方程会多出哪些非物理项？

Solution

考虑扩展拉格朗日函数：

$$L_{\text{ext}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}^2 + \lambda_1(t)(\dot{x} - R\sin\theta\dot{\varphi}) + \lambda_2(t)(\dot{y} + R\cos\theta\dot{\varphi})$$

欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

对广义坐标 x

$$M\ddot{x} = -\dot{\lambda}_1(t)$$

对广义坐标 y

$$M\ddot{y} = -\dot{\lambda}_2(t)$$

对广义坐标 φ

$$I_1\ddot{\varphi} - \dot{\lambda}_1(t)R\sin\theta - \lambda_1(t)R\cos\theta\,\dot{\theta} + \dot{\lambda}_2(t)R\cos\theta - \lambda_2(t)R\sin\theta\,\dot{\theta} = 0$$

对广义坐标 θ

$$I_2\ddot{\theta} + \lambda_1(t)R\cos\theta\,\dot{\varphi} - \lambda_2(t)R\sin\theta\,\dot{\varphi} = 0$$

由前两个方程知 $-\dot{\lambda}_1$ 和 $-\dot{\lambda}_2$ 分别对应的是在 x、y 方向的约束力。

第三、四个方程 $I_1\ddot{\varphi}$ 这样的形式，应为角动量变化率与力矩对应的方程，第三个方程中的 $\dot{\lambda}_1(t)R\sin\theta$ 和 $\dot{\lambda}_2(t)R\cos\theta$ 对应的为约束力力矩，是物理的。而 $\lambda_1(t)R\cos\theta\,\dot{\theta}$ 和 $\lambda_2(t)R\sin\theta\,\dot{\theta}$ 含有 $\dot{\theta}$，这不应该在力矩中出现，故为非物理项。

同理第四个方程中，$\lambda_1(t)R\cos\theta\,\dot{\varphi}$ 和 $\lambda_2(t)R\sin\theta\,\dot{\varphi}$ 是非物理项。

理论力学作业 16 参考答案

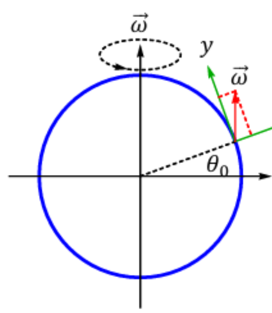
助教：张积翔、于洪飞

20.

取地表向东方向为 x 轴正向，地表向北为 y 轴，垂直地表向上为 z 轴（ENU 坐标）。地球自转角速度沿着北极方向，在 ENU 坐标中的分量是

$$\vec{\omega} = (0, \omega_0 \cos\theta_0, \omega_0 \sin\theta_0)$$

其中 θ_0 是坐标原点附近的纬度。



在重力作用下，落体运动的拉氏函数应该写成

$$L(t, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + m \dot{\vec{x}} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{x}) - mgz$$

(1) 设广义能量为 E。用等能条件求出 dt 与弧长 $|d\vec{x}|$ 的关系。

(2) 用上述关系，化简哈密顿形式的莫培督原理中的约化作用量

$$W[x, y] = \int_A^B \vec{p} \cdot d\vec{x} = \int_{z_1}^{z_2} L_{\text{eff}} \left(z, x(z), y(z), \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz} \right) dz$$

其中的泛函宗量取成轨迹

$$x = x(z), \quad y = y(z)$$

给出 L_{eff} 的表达式。

提示：阅读讲稿中的推导过程，注意 $p_a = \partial L / \partial \dot{q}_a$，$p_a \neq \partial T / \partial \dot{q}_a$。

(3) 讨论物体在高处静止下落的情形，ω_0 和 $x, \frac{dx}{dz}, y, \frac{dy}{dz}$ 均为一阶小量。在拉格朗日函数 L_{eff} 中只需保留到二阶小量，写出 L_{eff} 的二阶近似表达式。

(4) 根据 (3) 的近似拉氏函数，写出落体的轨道方程。

(5) 设开始时质点静止于坐标原点，

$$x(z=0)=0,\quad y(z=0)=0,\quad E=0$$

其中 E 是广义能量。求下落高度 h 之后（$z=-h$），偏东的距离 $x(-h)$。

Solution

1. 由于拉氏量里不显含时间 t，故广义能量 E 守恒

$$\begin{aligned}E &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\cdot\dot{\vec{x}} - L \\ &= m\dot{\vec{x}}^2 + m\dot{\vec{x}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{x}) \\ &\quad - \left[\frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + m\dot{\vec{x}}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{x}) - mgz\right] \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 + mgz\end{aligned}$$

即机械能（动能 + 重力势能）是运动常数。

等能条件：

$$\frac{1}{2}m\frac{|d\vec{x}|^2}{dt^2} + mgz = E$$

故

$$dt = \frac{|d\vec{x}|}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-mgz)}}$$

2. 哈密顿形式的莫培督原理（等能路径）的约化作用量：

$$W = \int_A^B \vec{p}\cdot d\vec{x}$$

其中 $\vec{p} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + m(\vec{\omega}\times\vec{x})$。

用 z 作自变量（由于我们通常考察下落情形即 dz<0，故开根号时会产生负号），$|d\vec{x}| = -\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}\,dz$, 其中 $x' = \dfrac{dx}{dz}$, $y' = \dfrac{dy}{dz}$。等能关系化为：

$$dt = -\frac{\sqrt{1+(x')^2+(y')^2}\,dz}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-mgz)}}$$

由于 $\vec{\omega} = (0, \omega_0\cos\theta_0, \omega_0\sin\theta_0)$，动量分量为：

Solution

$$p_x = m\dot{x} + m\omega_0(\cos\theta_0\, z - \sin\theta_0\, y)$$
$$p_y = m\dot{y} + m\omega_0 \sin\theta_0\, x$$
$$p_z = m\dot{z} - m\omega_0 \cos\theta_0\, x$$

约化作用量：

$$W = \int \left[p_x dx + p_y dy + p_z dz\right] = \int_{z_1}^{z_2} \left[p_x x' + p_y y' + p_z\right] dz$$

又 $\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dz}\frac{dz}{dt} = (x', y', 1)\frac{dz}{dt}$，有效拉格朗日量为：

$$\begin{aligned}
L_{\text{eff}} &= p_x x' + p_y y' + p_z \\
&= (m\dot{x} + m\omega_0(\cos\theta_0\, z - \sin\theta_0\, y))\, x' + (m\dot{y} + m\omega_0 \sin\theta_0\, x)\, y' + (m\dot{z} - m\omega_0\cos\theta_0\, x) \\
&= m(x'^2 + y'^2 + 1)\frac{dz}{dt} + m\omega_0\left(\cos\theta_0\, zx' - \sin\theta_0\, yx' + \sin\theta_0 xy' - \cos\theta_0 x\right) \\
&= -\sqrt{2m(E - mgz)(1 + x'^2 + y'^2)} + m\omega_0\left(\cos\theta_0\, zx' - \sin\theta_0\, yx' + \sin\theta_0 xy' - \cos\theta_0 x\right)
\end{aligned}$$

3. 设 ω_0 和 x, x', y, y' 均为一阶小量，保留到二阶小量。
根式部分展开：

$$\sqrt{2m(E - mgz)(1 + x'^2 + y'^2)} \approx \sqrt{2m(E - mgz)}\left(1 + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right)$$

L_{eff} 中的旋转部分有二阶项和三阶项，略去三阶项，即：

$$m\omega_0\left(\cos\theta_0\, zx' - \sin\theta_0\, yx' + \sin\theta_0 xy' - \cos\theta_0 xz'\right) \approx m\omega_0\cos\theta_0(x'z - x)$$

因此 L_{eff} 二阶近似为：

$$L_{\text{eff}}^{(2)} = -\sqrt{2m(E - mgz)}\left(1 + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\right) + m\omega_0\cos\theta_0(x'z - x)$$

4. 从近似拉格朗日量 $L_{\text{eff}}^{(2)}$ 出发，定义 $A(z) = \sqrt{2m(E - mgz)}$。
对 x 的欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x'}\right) = \frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x}$$

计算导数：

Solution

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x'} = -A(z)x' + m\omega_0 \cos\theta_0 z$$
$$\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial x} = -m\omega_0 \cos\theta_0$$

得到 x 方程：

$$\frac{d}{dz}[-A(z)x' + m\omega_0 \cos\theta_0 z] = -m\omega_0 \cos\theta_0$$

对 y 的欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y'}\right) = \frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y}$$

计算导数：

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y'} = -A(z)y'$$
$$\frac{\partial L_{\text{eff}}^{(2)}}{\partial y} = 0$$

得到 y 方程：

$$\frac{d}{dz}[A(z)y'] = 0$$

5. 初始条件：$x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $E = 0$。
由 $E = 0$ 得 $A(z) = \sqrt{-2m^2 gz}$（$z < 0$）。
x 对应的欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dz}[-A(z)x' + m\omega_0 \cos\theta_0 z] = -m\omega_0 \cos\theta_0$$

化为：

$$-\frac{d}{dz}\sqrt{-2m^2 gz}x' = -2m\omega_0 \cos\theta_0$$

积分一次：

$$\sqrt{-2m^2 gz}x' = 2m\omega_0 \cos\theta_0 z + C$$

由初始条件 $z = 0$，得 $C = 0$，所以：

$$\sqrt{-2m^2 gz}x' = 2m\omega_0 \cos\theta_0 z$$

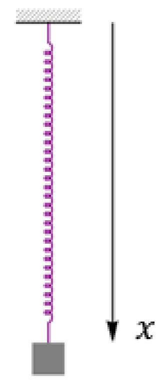
$$x' = \frac{dx}{dz} = -\omega_0 \cos\theta_0 \sqrt{-\frac{2z}{g}}$$

Solution

积分得：

$$x(-h) = -\omega_0 \cos\theta_0 \int_0^{-h} \sqrt{-\frac{2z}{g}}\, dz$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega_0 \cos\theta_0 \frac{h^{3/2}}{\sqrt{g}}$$

21.



均匀弹簧固定在天花板上，弹簧下悬一重物。只考虑垂直方向的运动，记弹簧的偏移为

$$\psi(x,t), \quad x \in [0,a]$$

重物的坐标是

$$\psi(a,t)+a$$

设弹簧线密度为 ρ，单位长度的弹性系数为 E，重物质量是 m。

(1) 写出作用量 $S[\psi]$。

(2) 利用哈密顿原理求出拉格朗日方程和自然边界条件。

(3) 所得的自然边界条件，即重物的运动方程。这个自然边界条件是否与牛顿第二定律一致？

Solution

1. 系统的动能包括弹簧动能和重物动能：

$$T = \frac{1}{2}\int_0^a \rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 dx \;+\; \frac{1}{2}m\left(\frac{\partial\psi(a,t)}{\partial t}\right)^2$$

势能包括弹簧弹性势能和重物重力势能）：

$$U = \frac{1}{2}\int_0^a E\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 dx \;-\; mg\left(\psi(a,t)+a\right)$$

于是作用量为：

$$S[\psi] = \int_{t_1}^{t_2} [T-U]\, dt$$

即

$$S[\psi] = \int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{1}{2}\int_0^a \rho(\partial_t\psi)^2 - E(\partial_x\psi)^2\, dx + \frac{1}{2}m(\partial_t\psi(a,t))^2 + mg\left(\psi(a,t)+a\right)\right\} dt$$

Solution

2. 记

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\rho(\partial_t\psi)^2 - E(\partial_x\psi)^2\right)$$

$$S_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2}\int_0^a \rho(\partial_t\psi)^2 - E(\partial_x\psi)^2 \, dx \right\} dt$$

$$S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{1}{2} m(\partial_t\psi(a,t))^2 + mg\left(\psi(a,t) + a\right) \right\} dt$$

则作用量变分为：

$$\delta S_1 = \left(\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x \mathcal{L})} \delta\psi dt \right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} + \iint dt dx \delta\psi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \frac{\overline{\partial}}{\overline{\partial} t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} - \frac{\overline{\partial}}{\overline{\partial} x}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)} \right)$$

计算各偏导数：

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t\psi)} = \rho\partial_t\psi, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_x\psi)} = -E\partial_x\psi$$

代入得：

$$\delta S_1 = \left(\int_{t_1}^{t_2} (-E\partial_x\psi)\delta\psi \, dt \right)\Bigg|_{x=0}^{x=a} + \iint dt\, dx\, \delta\psi \left(0 - \frac{\partial}{\partial t}(\rho\partial_t\psi) - \frac{\partial}{\partial x}(-E\partial_x\psi) \right)$$

$$\delta S_1 = -\int_{t_1}^{t_2} E\partial_x\psi(a,t)\delta\psi(a,t)\, dt + \iint dt\, dx\, \delta\psi \left(-\rho\partial_t^2\psi + E\partial_x^2\psi\right)$$

现在计算 δS_2：

$$\delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[m\partial_t\psi(a,t)\, \delta(\partial_t\psi(a,t)) + mg\, \delta\psi(a,t) \right] dt$$

对时间项分部积分：

$$\int_{t_1}^{t_2} m\partial_t\psi(a,t)\, \delta(\partial_t\psi(a,t))\, dt = -\int_{t_1}^{t_2} m\partial_t^2\psi(a,t)\, \delta\psi(a,t)\, dt$$

所以：

$$\delta S_2 = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m\partial_t^2\psi(a,t) + mg \right] \delta\psi(a,t)\, dt$$

总变分 $\delta S = \delta S_1 + \delta S_2$：

$$\delta S = \iint dt\, dx\, \delta\psi \left(-\rho\partial_t^2\psi + E\partial_x^2\psi\right) + \int_{t_1}^{t_2} \left[-E\partial_x\psi(a,t) - m\partial_t^2\psi(a,t) + mg \right] \delta\psi(a,t)\, dt$$

由 $\delta S = 0$ 得：

拉格朗日方程（$0 < x < a$）：

$$\rho\partial_t^2\psi - E\partial_x^2\psi = 0$$

Solution

边界条件：

$$x=0: \quad \psi(0,t)=0 \quad （固定端）$$

$$x=a: \quad E\partial_x\psi(a,t)+m\partial_t^2\psi(a,t)-mg=0 \quad （自然边界条件）$$

3. 自然边界条件：

$$m\partial_t^2\psi(a,t)=-E\partial_x\psi(a,t)+mg$$

即

$$ma=F_{\text{elastic}}+F_{\text{gravity}}$$

与牛顿第二定律一致

22.

考虑例题中的一维弹性棒，假设棒的两端是自由的。

(1) 求驻波解 $u_n(x)$ 和自然频率 ω_n。

(2) 已知初始条件

$$\begin{cases}\psi(x,t=0)=\eta(x)\\(\partial_t\psi)|_{t=0}=\xi(x)\end{cases}$$

求 $\psi(x,t)$。

Solution

1. 例题中一维棒所满足的拉格朗日方程和边界条件分别为：

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-E\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=0}=0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}|_{x=l}=0$$

分离变量，设

$$\psi(x,t)=u(x)q(t)$$

代入拉格朗日方程得：

$$\rho u(x)\ddot{q}(t)-Eq(t)u''(x)=0$$

整理得：

$$\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}=\frac{E}{\rho}\frac{u''(x)}{u(x)}$$

令上式等于常数 $-\omega^2$，得到两个常微分方程：

Solution

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0$$

$$u''(x) + \frac{\rho}{E}\omega^2 u(x) = 0$$

令 $k^2 = \frac{\rho}{E}\omega^2$，则空间方程为：

$$u''(x) + k^2 u(x) = 0$$

通解为：

$$u(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

代入边界条件：

$$u'(0) = -Ak\sin 0 + Bk\cos 0 = Bk = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

$$u'(l) = -Ak\sin kl = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin kl = 0$$

所以：

$$kl = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

即自然频率 ω_n 为：

$$k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{E}{\rho}}k_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

相应的本征函数（即驻波解）为：

$$u_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad n = 1, 2, \ldots$$

时间部分的解为：

$$q_n(t) = C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)$$

驻波解还可以为常数 u_0，此时 $\omega = 0$，对应的时间部分为 $q_0 = a + bt$
因此通解为：

$$\psi(x,t) = a + bt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

2.
已知初始条件：

$$\psi(x,0) = \eta(x), \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = \xi(x)$$

通解形式为：

$$\psi(x,t) = a + bt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Solution

其中 $\omega_n = \frac{n\pi}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$。

代入初始条件确定系数：

在 $t = 0$ 时：

$$\psi(x,0) = a + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \eta(x)$$

利用正交性：

$$a = \frac{1}{l}\int_0^l \eta(x)dx, \quad C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \eta(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

对时间求偏导：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,t) = b + \sum_{n=1}^{\infty}\left[-\omega_n C_n \sin(\omega_n t) + \omega_n D_n \cos(\omega_n t)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

在 $t = 0$ 时：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = b + \sum_{n=1}^{\infty}\omega_n D_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \xi(x)$$

利用正交性：

$$b = \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx, \quad D_n = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^l \xi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

因此最终解为：

$$\psi(x,t) = a + bt + \sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\cos(\omega_n t) + D_n\sin(\omega_n t)\right]\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中系数：

$$a = \frac{1}{l}\int_0^l \eta(x)dx, \quad b = \frac{1}{l}\int_0^l \xi(x)dx,$$

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \eta(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx, \quad D_n = \frac{2}{l\omega_n}\int_0^l \xi(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx$$

理论力学作业 18 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

5. 粒子在均匀引力场中自由下落，拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

(1) 设初位移为 x_0，初速度为 v_0，求 $x(t)$。

(2) 反解出 $x_0 = A(t, x, \dot{x})$，$v_0 = B(t, x, \dot{x})$。

(3) 力学量 $A(t, x, \dot{x})$ 必然是守恒量，求对应的准对称变换。

(4) 求力学量 $B(t, x, \dot{x})$ 对应的准对称变换。

Solution

(1).

粒子在均匀引力场中自由下落，拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mgx$$

欧拉-拉格朗日方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\ddot{x} = g$$

积分得：

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

(2).

由运动解：

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

$$\dot{x} = gt + v_0$$

由第二式得：

$$v_0 = B(t, x, \dot{x}) = \dot{x} - gt$$

Solution

代入第一式：

$$x_0 = A(t, x, \dot{x}) = x - \dot{x}t + \frac{1}{2}gt^2$$

(3).

$A = x - \dot{x}t + \frac{1}{2}gt^2$ 是守恒量，这个守恒量对应着力，故其应由 Boost 变换产生。

猜测其对应的准对称变换为：

$$t' = t, \quad x' = x + at$$

其中 a,b 为无穷小量，代入诺特定理，

$$L' = \frac{1}{2}m(\dot{x} + a)^2 + mg(x + at) = L + ma\dot{x} + mgat + O(a^2)$$

即 $\dfrac{d\varphi}{dt} = ma\dot{x} + mgat$，

$$\Delta\varphi = max + \frac{1}{2}mgat^2$$

守恒量为：

$$\begin{aligned} p\Delta x - \Delta\varphi &= m\dot{x}(at + b) - max - \frac{1}{2}mgat^2 \\ &= -am(x - \dot{x}t + \frac{1}{2}gt^2) \end{aligned}$$

因此对应的准对称变换为 $t' = t, \quad x' = x + at$

(4).

$B = \dot{x} - gt$ 是守恒量，对应动量定理，故对应的准对称变换应为空间平移。

设对应的准对称变换为：

$$t' = t, \quad x' = x + a$$

根据诺特定理，

$$L' = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + mg(x + a) = L + mga$$

故 $\frac{d\varphi}{dt} = mga$，得

$$\varphi = mgat$$

守恒量为：

$$p\Delta x - \Delta\varphi = m\dot{x}a - mgat$$

即守恒量为 $\dot{x} - gt$，对应的准对称变换为 $t' = t, \quad x' = x + a$

此题选做，不计入成绩：

6. 试用最小作用量原理和伽利略协变性，推导牛顿三定律（Newton's Three Laws of Motion）：

- **Newton's First Law of Motion (Law of Inertia)** Every body continues in its state of rest, or of uniform motion in a straight line, unless it is compelled to change that state by forces impressed upon it.
- **Newton's Second Law of Motion** The acceleration produced by a particular force acting on a body is directly proportional to the magnitude of the force and inversely proportional to the mass of the body.
- **Newton's Third Law of Motion** To every action there is always opposed an equal reaction; or, the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts. - translated from the "Principia"

提示：

讲义中的推论可以直接引用。

惯性定律可以利用单个质点的拉氏函数推得。

为了证明第二定律，可以利用质点组的拉氏函数

$$L = \sum_{a=1}^{N} \frac{1}{2} m_a \dot{x}_a^2 - V(\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_N)$$

第三定律是关于两体相互作用用的论断，你需要取 $N = 2$ 个质点组成的封闭体系讨论。

是否能证明牛顿第三定律的强形式——"作用力和反作用力大小相等、方向相反、且在一条连线上"？这里的"在一条连线上"应该理解为"作用力与反作用力的力矩之和为零"。

Solution

1.

我们先来推导惯性定律。考虑伽利略协变的单个质点的拉氏函数（老师讲义的结论）：

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2$$

考虑空间平移对称变换：

$$t' = t, \quad \vec{x'} = \vec{x} + \vec{a}$$

$$L' = L$$

由诺特定理，守恒量为

$$p_\alpha \Delta q_\alpha = m \dot{\vec{x}} \cdot \vec{a}$$

故自由粒子的 $\dot{\vec{x}}$ 不随时间变化，即牛顿第一定律。

Solution

2. 对质点组拉氏函数 $L=\sum_{a=1}^{N}\frac{1}{2}m_a\dot{x}_a^2-V(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_N)$，考虑空间平移准对称变换：

$$t'=t,\quad \vec{x'}_i=\vec{x}_i+\vec{a}_i$$

其中 a 为无穷小量，由诺特定理，

$$L'=L-\Sigma_i\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_i}\cdot\vec{a}_i$$

即

$$\Delta\varphi=\Sigma_i\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_i}\cdot\vec{a}_i t$$

故守恒量为：

$$p_\alpha\Delta q_\alpha-\Delta\varphi=\Sigma_i m_i\dot{\vec{x}}_i\cdot\vec{a}_i+\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_i}t\cdot\vec{a}_i=\Sigma_i(m_i\dot{\vec{x}}_i+\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_i}t)\cdot\vec{a}_i$$

由于 $\vec{a_i}$ 的任意性知，$m_i\dot{\vec{x}}_i+\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_i}t$ 为守恒量，求导得 $m_i\ddot{\vec{x}}_i=-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_i}$
即为牛顿第二定律

3.

考虑封闭的两质点系统 m_1,m_2，拉氏量：

$$L=\frac{1}{2}m_1\dot{\vec{x}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\vec{x}}_2^2-V(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$$

直接套用上一问的结论，$m_i\ddot{\vec{x}}_i=-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_i}$。由于封闭系统，故 $V=V(\vec{x}_1-\vec{x}_2)$，所以

$$\vec{F}_1=-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_1}=\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_2}=-\vec{F}_2$$

即为牛顿第三定律。下面证明强形式即通过证明作用力与反作用力的力矩之和为零来证明作用量与反作用力在一条连线上。

要求势能为距离的函数 $V=V(|\vec{x}_1-\vec{x}_2|)$ 即要求系统具有空间转动不变性，考虑空间转动变换：

$$t'=t,\quad \vec{x}'=\vec{x}+\vec{\theta}\times\vec{x}$$

其中 θ 为无穷小量，拉氏量 L' 为：

$$\begin{aligned}L'&=\frac{1}{2}m_1\left[\dot{\vec{x}}_1^2+(\vec{\theta}\times\dot{\vec{x}}_1)^2\right]+\frac{1}{2}m_2\left[\dot{\vec{x}}_2^2+(\vec{\theta}\times\dot{\vec{x}}_2)^2\right]-V(|\vec{x}_1-\vec{x}_2+\vec{\theta}\times(\vec{x}_1-\vec{x}_2)|)\\&=L-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_1}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{x}_1)-\frac{\partial V}{\partial\vec{x}_2}\cdot(\vec{\theta}\times\vec{x}_2)+O(\theta^2)\\&=L+O(\theta^2)\end{aligned}$$

故 $\Delta\varphi=0$ 即系统合力矩为零，因此牛顿第三定律强形式成立。

7. 自由运动的慢子满足 Poincaré 不变性。请写出 Poincaré 变换对应的 10 个诺特守恒量。

Solution

庞加莱变换有十个自由度，因而十个无穷小的庞加莱变换对应着十个诺特守恒量。十个无穷小变换分别为四个时空平移和六个洛伦兹变换。

首先讨论时空平移：

自由粒子的拉氏函数为

$$L = -m\sqrt{1-v^2}$$

广义动量

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \gamma m \vec{v}$$

广义积分

$$H = \vec{p}\cdot\vec{v} - L = \gamma m$$

显然时空变换下 $\Delta\varphi = 0$，故由诺特定理：

时间变换 $t' = t + a$ 下，守恒量为

$$H\Delta t = aH = a\gamma m$$

即 γm 能量守恒

空间变换下守恒量为

$$\vec{p}\cdot\Delta\vec{x}$$

即 $\vec{p} = \gamma m\vec{v}$ 动量守恒

下面讨论洛伦兹变换 Λ：

$$\Lambda^T g \Lambda = g$$

设无穷小洛伦兹变换 $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$，代入上式得

$$(\delta^\mu{}_\alpha + \omega^\mu{}_\alpha) g_{\mu\nu} (\delta^\nu{}_\beta + \omega^\nu{}_\beta) = g_{\alpha\beta}$$

得 $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$，即无穷小洛伦兹变换与恒等变换之间的差为反对称矩阵，4×4 反对称矩阵的六个自由度（即我们分别取矩阵的右上角的六个元素只有一个元素非零的矩阵）恰对应着六种无穷小洛伦兹变换。（或者可以直接将老师讲义中的六种洛伦兹变换直接取无穷小近似，能得到相同结果）

取六种无穷小洛伦兹变换为三个空间转动变换和 boost 变换。对于空间转动变换，以绕 x 轴转动为例：变换矩阵为

Solution

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\theta \\ 0 & 0 & \theta & 1 \end{pmatrix}$$

由于洛伦兹不变性，$\Delta\varphi = 0$，故守恒量为：

$$\vec{p} \cdot \Delta\vec{x} = p_z\theta y - p_y\theta z$$

即 x 方向角动量 $J_x = yp_z - zp_y$ 守恒。同理 J_y, J_z 也守恒。

Boost 变换以沿着 x 轴的为例，对应的无穷小变换矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由于洛伦兹不变性，$\Delta\varphi = 0$，故守恒量为：

$$H\Delta t - \vec{p} \cdot \vec{v} = H(-\eta x) - p_x(-\eta t)$$

即沿着 x 轴的 boost$K_x = Hx - p_x t$ 为守恒量，同理 K_y, K_z 也为守恒量

综上庞加莱变换对应的十个守恒量为：H, P_i, J_i, K_i

8. 电磁场中带电质点拉氏量为

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - q\phi(\vec{x}) + q\vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}}$$

考虑沿 z 轴正向的均匀静磁场，

$$\phi = 0, \quad \vec{A} = \frac{B}{2}(-y\vec{e_x} + x\vec{e_y})$$

请先验证绕 z 轴的无穷小转动

$$x' = x - \epsilon y, \quad y' = y + \epsilon x, \quad z' = z,$$

是对称变换，然后写出对应的诺特守恒量。

Solution

在该变换下拉氏量变为：

$$
\begin{aligned}
L' &= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + q\vec{A}(\vec{x}')\cdot\dot{\vec{x}}' \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}'^2 + q\left[-\frac{B}{2}y'\dot{x}' + \frac{B}{2}x'\dot{y}'\right] \\
&= \frac{1}{2}m\left[(\dot{x}-\epsilon\dot{y})^2 + (\dot{y}+\epsilon\dot{x})^2 + \dot{z}^2\right] + q\left[-\frac{B}{2}(y+\epsilon x)(\dot{x}-\epsilon\dot{y}) + \frac{B}{2}(x-\epsilon y)(\dot{y}+\epsilon\dot{x})\right] \\
&= L + O(\epsilon^2)
\end{aligned}
$$

即题中变换为对称变换，$\varphi = 0$。
广义动量为：

$$
\begin{aligned}
p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} - \frac{B}{2}qy \\
p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{B}{2}qx
\end{aligned}
$$

守恒量为：

$$
\begin{aligned}
p_\alpha \Delta x_\alpha &= (m\dot{x} - \frac{B}{2}qy)(-\epsilon y) + (m\dot{y} + \frac{B}{2}qx)(\epsilon x) \\
&= \epsilon\left[m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{B}{2}q(x^2+y^2)\right]
\end{aligned}
$$

故守恒量为 $m(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{B}{2}q(x^2+y^2)$

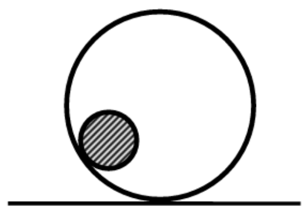
理论力学作业 20 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

以下两题，选做其一：

1.

一个半径为 R、质量为 M 的均质圆筒水平放置在粗糙的地面上作无滑滚动。在圆筒内再放入一个质量为 m、半径为 r 的圆柱体。圆柱体的轴向和圆筒的轴向平行，沿圆筒内表面作无滑滚动。



(1) 选取合适的广义坐标，给出系统的运动方程。

(2) 设 $m = 4M = 4$ 千克，$r = \frac{1}{2}R = 0.5$ 米，如果系统作小振动，其简正频率是多少？

Solution

(1)

设圆筒绕其中心的转动角为 φ, 圆柱质心相对于圆筒中心竖直向下方向的夹角为 θ。

根据外圆筒与地面无滑，设外圆筒质心横坐标为 x：

$$\dot{x} = R\dot{\varphi}$$

内圆柱的质心坐标为 $(x-(R-r)\sin\theta, (R-r)(1-\cos\theta))$，（这里选圆柱质心最低点为 y 方向原点）设圆柱的自转角度为 α，则由圆柱的无滑滚动得：

$$(R-r)\dot{\theta} - r\dot{\alpha} = R\dot{\varphi}$$

系统的总动能为：

$$\begin{aligned}T &= MR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\left[R\dot{\varphi} - (R-r)\cos\theta\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}m(R-r)^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\left[(R-r)\dot{\theta} - R\dot{\varphi}\right]^2 \\ &= \left(M + \frac{3}{4}m\right)R^2\dot{\varphi}^2 - mR(R-r)\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Solution

系统的势能：

$$V = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

拉格朗日函数：$L = T - V$

由拉格朗日方程得到运动方程：

对于广义坐标 φ：

$$\left(2M + \frac{3}{2}m\right)R^2\ddot{\varphi} - mR(R-r)\left[\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)\ddot{\theta} - \sin\theta\dot{\theta}^2\right] = 0$$

对于广义坐标 θ：

$$\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} - m(R-r)\left[R\left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)\ddot{\varphi} - g\sin\theta\right] = 0$$

(2)

将题中所给参数数据代入，并取至二阶无穷小，得：

$$T = 4\dot{\varphi}^2 - 3\dot{\varphi}\dot{\theta} + \frac{3}{4}\dot{\theta}^2$$

$$V = g\dot{\theta}^2$$

因此惯性矩阵为：

$$M = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1.5 \end{pmatrix}$$

刚度矩阵为：

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2g \end{pmatrix}$$

特征方程为

$$det(-\omega^2 M + K) = 0$$

即：

$$\det\begin{pmatrix} -8\omega^2 & 3\omega^2 \\ 3\omega^2 & -1.5\omega^2 + 2g \end{pmatrix} = 0$$

计算行列式：

$$(-8\omega^2)(-1.5\omega^2 + 2g) - (3\omega^2)(3\omega^2) = 0$$

$$\omega^2(3\omega^2 - 16g) = 0$$

Solution

解得：

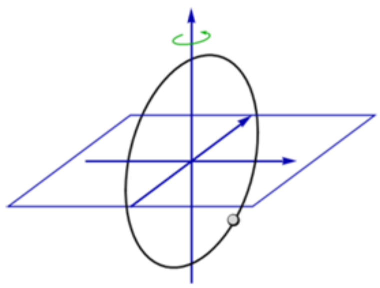
$$\omega_1^2 = 0, \quad \omega_2^2 = \frac{16g}{3}$$

因此：

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{16g}{3}} =\approx 7.23 \text{ rad/s}$$

2.

圆环在垂直平面内，绕通过圆心的垂直轴匀速旋转。圆环上穿有一个珠子，能在环上无阻滑动。求珠子的平衡位置和微振动频率。



Solution

取广义坐标 θ 为珠子在圆环上的角位置，从圆环最低点逆时针计量。

系统的动能为：

$$T = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\omega R\sin\theta)^2$$

其中第一项为珠子沿圆环运动的动能，第二项为珠子随圆环旋转的动能。

系统的势能为：

$$V = mgR(1-\cos\theta)$$

拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta - mgR(1-\cos\theta)$$

由拉格朗日方程可得：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = 0$$

即：

$$mR^2\ddot{\theta} - m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta + mgR\sin\theta = 0$$

Solution

化简得：

$$\ddot{\theta}+\left(\frac{g}{R}-\omega^2\cos\theta\right)\sin\theta=0$$

平衡时 $\ddot{\theta}=0$，故：

$$\left(\frac{g}{R}-\omega^2\cos\theta\right)\sin\theta=0$$

解得三个平衡位置：

$$\theta=0,\quad \theta=\pi,\quad \theta=\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$$

其中第三个平衡位置要求 $\omega^2\geq\frac{g}{R}$。

在平衡位置附近小振动，令 $\theta=\theta_0+\delta\theta$，代入运动方程并取一阶无穷小。

情况 1：$\theta=0$ 一阶微扰后得：

$$\ddot{\delta\theta}+\left(\frac{g}{R}-\omega^2\right)\delta\theta=0$$

当 $\omega^2<\frac{g}{R}$ 时，$\theta=0$ 稳定，微振动频率：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}-\omega^2}$$

情况 2：$\theta=\theta_0+\delta\theta=\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)+\delta\theta$，则

$$\cos\theta=\cos\left(\theta_0+\delta\theta\right)=\frac{g}{\omega^2 R}-\sqrt{1-\frac{g^2}{\omega^4R^2}}\delta\theta$$

代入运动方程得：

$$\delta\ddot{\theta}+\omega^2(1-\frac{g^2}{\omega^4R^2})\delta\theta=0$$

当 $\omega^2>\frac{g}{R}$ 时，该位置稳定，微振动频率：

$$\omega_\theta=\omega\sqrt{1-\frac{g^2}{\omega^4R^2}}$$

情况 3：$\theta=\pi$, 一阶微扰后得：

$$\ddot{\delta\theta}-\left(\frac{g}{R}+\omega^2\right)\delta\theta=0$$

该位置总是不稳定。

综上，

平衡位置有三个：$\theta=0$，$\theta=\arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$，$\theta=\pi$

当 $\omega^2<\frac{g}{R}$ 时，$\theta=0$ 稳定，微振动频率：

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{R}-\omega^2}$$

Solution

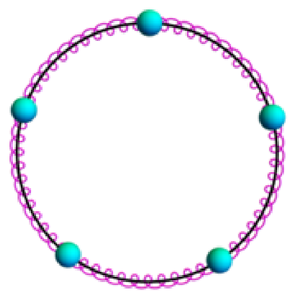
当 $\omega^2 > \frac{g}{R}$ 时，$\theta = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2 R}\right)$ 稳定，微振动频率：

$$\omega_\theta = \omega\sqrt{1 - \frac{g^2}{\omega^4 R^2}}$$

$\theta = \pi$ 不稳定

3.

质量 m 的 5 个小球，穿在半径 a 的光滑圆环上运动。小球之间用弹性系数 k 的轻弹簧连接。求系统的自然频率和简正模式。



Solution

5 个质量为 m 的小球等间距分布在半径为 a 的光滑圆环上，相邻小球间用弹性系数为 k 的弹簧连接。取平衡时小球的位置为参考，设第 j 个小球的微小角位移为 θ_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$。由于圆环的约束，小球的动能和势能分别为：
系统总动能为：

$$T = \frac{1}{2}ma^2\sum_{j=1}^{5}\dot{\theta}_j^2$$

惯性矩阵为：

$$M = ma^2 I$$

系统总势能为弹簧弹性势能：相邻小球 j 与 $j+1$ 之间的弧长变化为 $a(\theta_{j+1} - \theta_j)$，因此：

$$V = \frac{1}{2}ka^2\sum_{j=1}^{5}(\theta_{j+1} - \theta_j)^2$$

其中周期边界条件：$\theta_6 = \theta_1$。展开势能表达式：

$$V = \frac{1}{2}ka^2[(\theta_2 - \theta_1)^2 + (\theta_3 - \theta_2)^2 + (\theta_4 - \theta_3)^2 + (\theta_5 - \theta_4)^2 + (\theta_1 - \theta_5)^2]$$

Solution

由拉格朗日函数 $L=T-V$ 得到运动方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_j}\right)=\frac{\partial L}{\partial \theta_j}$$

计算得：

$$ma^2\ddot{\theta}_j+ka^2(2\theta_j-\theta_{j-1}-\theta_{j+1})=0$$

令 $\omega_0^2=\frac{k}{m}$，化简得：

$$\ddot{\theta}_j+\omega_0^2(2\theta_j-\theta_{j-1}-\theta_{j+1})=0\quad (j=1,2,3,4,5)$$

周期边界条件：$\theta_0=\theta_5$, $\theta_6=\theta_1$。
设简正模式为

$$\theta_n=A_ne^{-i\omega t}$$

代入运动方程，化简得

$$A_{n+1}+(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-2)A_n+A_{n-1}=0$$

对应（数列的）特征方程为：

$$\lambda^2+(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}-2)\lambda+1=0$$

设特征方程解为 λ_1,λ_2，则 $A_n=c_1\lambda_1^n+c_2\lambda_2^n$，由于周期条件即 $A_{n+5}=A_n$，故 $\lambda^5=1$，因此

$$\lambda_1=e^{i\frac{2k\pi}{5}},\quad \lambda_2=e^{-i\frac{2k\pi}{5}}\qquad k=0,1,2,3,4$$

根据韦达定理，$\lambda_1+\lambda_2=2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$，得

$$2-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}=2\cos\frac{2k\pi}{5}$$

$$\omega^2=2\omega_0^2(1-\cos\frac{2k\pi}{5})$$

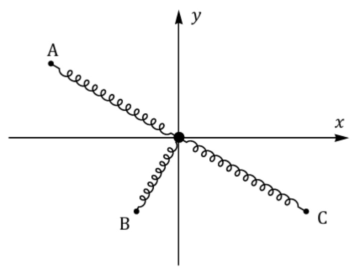
$$\omega=2\omega_0\sin\frac{k\pi}{5}$$

所以系统自然频率为：$\omega_0=0$,$\omega_{1,4}=2\omega_0\sin\frac{\pi}{5}$,$\omega_{2,3}=2\omega_0\sin\frac{2\pi}{5}$
取 $c_1=1,c_2=0$,$A_n^{(k)}=e^{i\frac{2k\pi n}{5}}$，系统第 k 个简正模式则为：

$$\theta_n^{(k)}=A_n^{(k)}e^{-i\omega_k t}=e^{i(\frac{2k\pi n}{5}-\omega_k t)}$$

4.

如图所示，一个质量为 m 的粒子，通过三根自然长度分别为 $\sqrt{3}$、1 和 $\sqrt{3}$ 的轻弹簧，分别挂在 xy-平面内的三个固定点 A、B 和 C 上。弹簧的弹性系数都是 k，三个固定点的坐标



分别是

$$A:\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad B:\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad C:\left(\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

设 xy-平面是光滑的水平面，且粒子不会脱离此平面。

(1) 写出系统的拉格朗日函数。

(2) 坐标原点显然是稳定平衡点。当粒子在平衡点附近作微振动时，求系统的自然频率和模态矩阵。

Solution

设粒子坐标为 (x, y)，平衡位置为原点 $(0, 0)$。

记各弹簧长度：

$$L_A=\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$L_B=\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$L_C=\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

弹性势能：

$$V=\frac{1}{2}k\left[(L_A-\sqrt{3})^2+(L_B-1)^2+(L_C-\sqrt{3})^2\right]$$

动能为 $T=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$

拉格朗日函数：

$$L=T-V=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\frac{1}{2}k\left[(L_A-\sqrt{3})^2+(L_B-1)^2+(L_C-\sqrt{3})^2\right]$$

Solution

惯性矩阵：

$$M = m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

下面计算刚度矩阵，分析弹簧 A 对势能的贡献：

$$\begin{aligned}(L_A-\sqrt{3})^2 &= (\sqrt{3+3x-\sqrt{3}y+x^2+y^2}-\sqrt{3})^2\\ &= 6+3x-\sqrt{3}y+x^2+y^2-2\sqrt{3}\sqrt{3+3x-\sqrt{3}y+x^2+y^2}\\ &= \frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2-\frac{\sqrt{3}}{2}xy\end{aligned}$$

故弹簧 A 对刚度矩阵贡献为：

$$K_A = k\begin{pmatrix}3/4 & -\sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

同理可得矩阵 B、C 对刚度矩阵贡献为：

$$K_B = k\begin{pmatrix}1/4 & \sqrt{3}/4\\ \sqrt{3}/4 & 3/4\end{pmatrix}$$

$$K_C = k\begin{pmatrix}3/4 & -\sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

总刚度矩阵：

$$K = k\begin{pmatrix}7/4 & -\sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & 5/4\end{pmatrix}$$

令 $\omega_0^2 = k/m$，特征多项式为：

$$\det\begin{pmatrix}7/4-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} & -\sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & 5/4-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\end{pmatrix} = 0$$

$$(\frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 - 3(\frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1, 2$$

得

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

代入到特征方程，$\omega = \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 时，

Solution

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \vec{a}_1 = 0$$

$\omega = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ 时,

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \vec{a}_2 = 0$$

解得归一的模态矩阵为：

$$A = \frac{1}{2\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

理论力学作业 22 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

以下三题选做其一：

7. 已知 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，证明恒等式

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_{n\times n}.$$

Solution

矩阵指数：

$$e^{iA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iA)^k}{k!}.$$

比较正余弦的泰勒展开，有矩阵欧拉公式：

$$e^{iA} = \cos A + i\sin A, \quad e^{-iA} = \cos A - i\sin A.$$

于是

$$\cos A = \frac{e^{iA}+e^{-iA}}{2}, \quad \sin A = \frac{e^{iA}-e^{-iA}}{2i}.$$

$[A, A] = 0$，由于 Baker-Hausdorff 公式，$e^{iA}e^{-iA} = I, e^{iA}e^{iA} = e^{2iA}$，故

$$\begin{aligned}
\cos^2 A &= \frac{e^{2iA}+2I+e^{-2iA}}{4},\\
\sin^2 A &= \frac{e^{2iA}-2I+e^{-2iA}}{-4} = \frac{-e^{2iA}+2I-e^{-2iA}}{4}.
\end{aligned}$$

相加得：

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \frac{(e^{2iA}+2I+e^{-2iA})+(-e^{2iA}+2I-e^{-2iA})}{4} = \frac{4I}{4} = I.$$

8. 已知 2 阶方阵

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{12} & \frac{7\pi}{12} \\ -\frac{5\pi}{12} & \frac{11\pi}{12} \end{pmatrix},$$

利用 Cayley-Hamilton 定理化简矩阵函数 $\cos M$。

Solution

$$\mathrm{tr}(M) = -\frac{\pi}{12}+\frac{11\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}, \quad \det(M) = \left(-\frac{\pi}{12}\right)\cdot\frac{11\pi}{12}-\frac{7\pi}{12}\cdot\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = -\frac{11\pi^2}{144}+\frac{35\pi^2}{144} = \frac{\pi^2}{6}.$$

因此矩阵的特征多项式为

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5\pi}{6}\lambda + \frac{\pi^2}{6}.$$

应用 Cayley-Hamilton 定理

$$M^2 - \frac{5\pi}{6}M + \frac{\pi^2}{6}I = 0 \quad \Longrightarrow \quad M^2 = \frac{5\pi}{6}M - \frac{\pi^2}{6}I.$$

由此，任意 M^k $(k \geq 2)$ 可表示为 M 与 I 的线性组合。

设 $\cos M = C_0 I + C_1 M$

由特征方程解得特征值：

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{5\pi}{6} \pm \sqrt{\frac{25\pi^2}{36} - \frac{4\pi^2}{6}}}{2} = \frac{\frac{5\pi}{6} \pm \frac{\pi}{6}}{2}.$$

$$\lambda_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\pi}{3}.$$

下面确定 C_0, C_1：

对任意矩阵函数 $f(M)$，若可写成 $f(M) = c_0 I + c_1 M$，则对每个特征值有

$$f(\lambda_i) = c_0 + c_1\lambda_i.$$

$$\begin{cases} \cos\frac{\pi}{2} = C_0 + C_1 \cdot \frac{\pi}{2} \\ \cos\frac{\pi}{3} = C_0 + C_1 \cdot \frac{\pi}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 0 = C_0 + \frac{\pi}{2}C_1 \\ \frac{1}{2} = C_0 + \frac{\pi}{3}C_1 \end{cases}$$

相减得：$\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{3}{\pi}$。

代入得：$0 = C_0 + \frac{\pi}{2} \cdot \left(-\frac{3}{\pi}\right) = C_0 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_0 = \frac{3}{2}$。

$$\cos M = \frac{3}{2}I - \frac{3}{\pi}M = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

9. 写出第 4 题中的时间演化矩阵 $U(t,0)$ 并化简。

Solution

由第 20 次作业知，系统的惯性矩阵为：

$$M = m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

刚度矩阵为：

$$K = k\begin{pmatrix}7/4 & -\sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & 5/4\end{pmatrix}$$

时间演化矩阵为

$$U(t,0) = \exp\left\{\begin{pmatrix}0 & I\\ -M^{-1}K & 0\end{pmatrix}t\right\} = \begin{pmatrix}\cos(\sqrt{M^{-1}K}\,t) & \dfrac{\sin(\sqrt{M^{-1}K}\,t)}{\sqrt{M^{-1}K}}\\ -\sqrt{M^{-1}K}\,\sin(\sqrt{M^{-1}K}\,t) & \cos(\sqrt{M^{-1}K}\,t)\end{pmatrix},$$

其中 $\sqrt{M^{-1}K}$ 是满足 $(\sqrt{M^{-1}K})^2 = M^{-1}K$ 的矩阵平方根。
化简 $\cos(\sqrt{M^{-1}K}\,t)$ 部分
令 $A = M^{-1}K$，则

$$A = \omega_0^2\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$

特征多项式：

$$\det(A-\lambda I) = \lambda^2 - 3\omega_0^2\lambda + 2\omega_0^4 = 0$$

特征值：

$$\lambda_1 = \omega_0^2, \quad \lambda_2 = 2\omega_0^2$$

对应的开方特征值：

$$\sqrt{\lambda_1} = \omega_0, \quad \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{2}\,\omega_0.$$

由 Cayley-Hamilton 定理，$\cos(\sqrt{A}\,t)$ 可表为 A 的线性组合：

$$\cos(\sqrt{A}\,t) = c_0 I + c_1 A,$$

其中 c_0, c_1 由以下方程组确定：

$$\begin{cases}\cos(\omega_0 t) = c_0 + c_1\omega_0^2,\\ \cos(\sqrt{2}\,\omega_0 t) = c_0 + 2c_1\omega_0^2.\end{cases}$$

解得：

$$c_1 = \frac{\cos(\sqrt{2}\,\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega_0^2}, \quad c_0 = 2\cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{2}\,\omega_0 t).$$

Solution

代入 A 的表达式：

$$\cos(\sqrt{A}\,t)=\left[2\cos(\omega_0 t)-\cos(\sqrt{2}\,\omega_0 t)\right]I+\left[\cos(\sqrt{2}\,\omega_0 t)-\cos(\omega_0 t)\right]\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix}.$$

记 $C_1=\cos(\omega_0 t)$，$C_2=\cos(\sqrt{2}\,\omega_0 t)$，则：

$$\cos(\sqrt{A}\,t)=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}C_1+3C_2 & \sqrt{3}(C_1-C_2)\\ \sqrt{3}(C_1-C_2) & 3C_1+C_2\end{pmatrix}.$$

下面化简 $\dfrac{\sin(\sqrt{M^{-1}K}\,t)}{\sqrt{M^{-1}K}}$ 部分：

设

$$\frac{\sin(\sqrt{A}\,t)}{\sqrt{A}}=d_0 I+d_1 A,$$

由条件：

$$\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}=d_0+d_1\omega_0^2,\quad \frac{\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}\,\omega_0}=d_0+2d_1\omega_0^2.$$

解得：

$$d_1=\frac{1}{\omega_0^2}\left[\frac{\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}\,\omega_0}-\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}\right],\quad d_0=\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}-d_1\omega_0^2.$$

即：

$$d_0=\frac{2\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}-\frac{\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}\,\omega_0},\quad d_1=\frac{\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}\,\omega_0^3}-\frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^3}.$$

代入 A 表达式并化简，得：

$$\frac{\sin(\sqrt{A}\,t)}{\sqrt{A}}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{3\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}+\frac{\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}\,\omega_0} & \frac{\sqrt{3}}{\omega_0}\left[\sin(\omega_0 t)-\frac{\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}}\right]\\ \frac{\sqrt{3}}{\omega_0}\left[\sin(\omega_0 t)-\frac{\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}}\right] & \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0}+\frac{3\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)}{\sqrt{2}\,\omega_0}\end{pmatrix}.$$

化简 $-\sqrt{M^{-1}K}\,\sin(\sqrt{M^{-1}K}\,t)$ 部分：

设

$$\sqrt{A}\,\sin(\sqrt{A}\,t)=e_0 I+e_1 A,$$

由条件：

$$\omega_0\sin(\omega_0 t)=e_0+e_1\omega_0^2,\quad \sqrt{2}\,\omega_0\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)=e_0+2e_1\omega_0^2.$$

解得：

$$e_1=\frac{\sqrt{2}\,\omega_0\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)-\omega_0\sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2},\quad e_0=\omega_0\sin(\omega_0 t)-e_1\omega_0^2.$$

Solution

代入 A 并取负号：

$$-\sqrt{A}\,\sin(\sqrt{A}\,t)=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\omega_0\sin(\omega_0 t)+\sqrt{2}\,\omega_0\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t) & \sqrt{3}\,\omega_0\left[\sin(\omega_0 t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)\right]\\ \sqrt{3}\,\omega_0\left[\sin(\omega_0 t)-\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)\right] & \omega_0\sin(\omega_0 t)+3\sqrt{2}\,\omega_0\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t)\end{pmatrix}.$$

综上：

$$U(t,0)=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\begin{pmatrix}C_1+3C_2 & \sqrt{3}(C_1-C_2)\\ \sqrt{3}(C_1-C_2) & 3C_1+C_2\end{pmatrix} & \frac{1}{4}\begin{pmatrix}\frac{3S_1}{\omega_0}+\frac{S_2}{\sqrt{2}\omega_0} & \frac{\sqrt{3}}{\omega_0}\left(S_1-\frac{S_2}{\sqrt{2}}\right)\\ \frac{\sqrt{3}}{\omega_0}\left(S_1-\frac{S_2}{\sqrt{2}}\right) & \frac{S_1}{\omega_0}+\frac{3S_2}{\sqrt{2}\omega_0}\end{pmatrix}\\ -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3\omega_0S_1+\sqrt{2}\omega_0S_2 & \sqrt{3}\,\omega_0(S_1-\sqrt{2}S_2)\\ \sqrt{3}\,\omega_0(S_1-\sqrt{2}S_2) & \omega_0S_1+3\sqrt{2}\omega_0S_2\end{pmatrix} & \frac{1}{4}\begin{pmatrix}C_1+3C_2 & \sqrt{3}(C_1-C_2)\\ \sqrt{3}(C_1-C_2) & 3C_1+C_2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

其中简记为：

$$C_1=\cos(\omega_0 t),\quad C_2=\cos(\sqrt{2}\,\omega_0 t),\quad S_1=\sin(\omega_0 t),\quad S_2=\sin(\sqrt{2}\,\omega_0 t).$$

此即为第 4 题微振动系统时间演化矩阵 $U(t,0)$ 的化简显式。

10. 第 4 题中的粒子，开始时处于静止状态。设粒子带有电荷 e，并且受到电场

$$\vec{E}=E\cos\omega t\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

的驱动，求微振动解。

Solution

由第 4 题，微振动方程为

$$M\ddot{\vec{\eta}}+K\vec{\eta}=\vec{F}(t),$$

其中

$$M=mI_{2\times 2},\quad K=k\begin{pmatrix}\frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{5}{4}\end{pmatrix},\quad \vec{\eta}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

$$\vec{F}(t)=e\begin{pmatrix}E_x(t)\\ E_y(t)\end{pmatrix}.$$

系统的模态矩阵为

$$A=\frac{1}{2\sqrt{m}}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}.$$

Solution

该矩阵列矢量满足广义特征方程：

$$K\vec{a}_1 = m\omega_1^2\vec{a}_1, \quad K\vec{a}_2 = m\omega_2^2\vec{a}_2,$$

其中 $\vec{a}$ 为 A 的列矢量，自然频率为

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

定义简正坐标 $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^T$ 满足

$$\vec{\eta} = A\vec{\xi}.$$

将 $\vec{\eta} = A\vec{\xi}$ 代入运动方程并左乘 A^T：

$$mA^TA\ddot{\vec{\xi}} + A^TKA\vec{\xi} = A^T\vec{F}(t).$$

计算：

$$A^TA = \frac{1}{m}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^TKA = \frac{k}{m}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}.$$

于是

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = (A^T\vec{F})_1, \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = (A^T\vec{F})_2.$$

计算广义力：

$$A^T\vec{F} = \frac{1}{2\sqrt{m}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} eE_x \\ eE_y \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{m}}eE\cos(\omega t)\begin{pmatrix} \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta \\ \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta \end{pmatrix}.$$

记

$$Q_1(t) = eE\big(\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta\big)\cos(\omega t), \quad Q_2(t) = eE\big(\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\big)\cos(\omega t).$$

则

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_1^2\xi_1 = \frac{Q_1(t)}{2\sqrt{m}}, \quad \ddot{\xi}_2 + \omega_2^2\xi_2 = \frac{Q_2(t)}{2\sqrt{m}}.$$

先考虑非共振情况 ($\omega \neq \omega_1, \omega_2$)

方程 $\ddot{\xi}_j + \omega_j^2\xi_j = Q_j(t)$ 的通解为齐次解加特解：

$$\xi_j(t) = A_j\cos(\omega_j t) + B_j\sin(\omega_j t) + \xi_{jp}(t).$$

设特解形式为 $\xi_{jp}(t) = C_j\cos(\omega t)$，代入得：

$$(-\omega^2 + \omega_j^2)C_j\cos(\omega t) = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}}\cos(\omega t), \quad \gamma_1 = \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta,\ \gamma_2 = \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta.$$

Solution

解得

$$C_j = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2-\omega^2)}.$$

因此

$$\xi_j(t) = A_j\cos(\omega_j t) + B_j\sin(\omega_j t) + \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2-\omega^2)}\cos(\omega t).$$

由初条件 $\xi_j(0)=0, \dot{\xi}_j(0)=0$：

$$A_j + \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2-\omega^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_j = -\frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2-\omega^2)},$$

$$\dot{\xi}_j(0) = B_j\omega_j = 0 \quad \Rightarrow \quad B_j = 0.$$

于是

$$\xi_j(t) = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}(\omega_j^2-\omega^2)}\big[\cos(\omega t) - \cos(\omega_j t)\big].$$

考虑共振情况

若 $\omega=\omega_j$，则特解形式需改为：

$$\xi_{jp}(t) = C_j t\sin(\omega_j t).$$

代入方程：

$$\ddot{\xi}_{jp} + \omega_j^2\xi_{jp} = 2\omega_j C_j\cos(\omega_j t) = \frac{eE\gamma_j}{2\sqrt{m}}\cos(\omega_j t),$$

解得

$$C_j = \frac{eE\gamma_j}{4\sqrt{m}\,\omega_j}.$$

通解为：

$$\xi_j(t) = A_j\cos(\omega_j t) + B_j\sin(\omega_j t) + \frac{eE\gamma_j}{4\sqrt{m}\,\omega_j}t\sin(\omega_j t).$$

由初条件 $\xi_j(0)=0, \dot{\xi}_j(0)=0$：

$$A_j = 0, \quad B_j = 0.$$

故共振时

$$\xi_j(t) = \frac{eE\gamma_j}{4\sqrt{m}\,\omega_j}t\sin(\omega_j t).$$

可将简正坐标的表达式统一写为（注意区分共振与非共振）：

$$\xi_1(t) = \begin{cases} \dfrac{eE\gamma_1}{2\sqrt{m}(\omega_0^2-\omega^2)}\big[\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)\big], & \omega\neq\omega_0, \\ \dfrac{eE\gamma_1}{4\sqrt{m}\,\omega_0}t\sin(\omega_0 t), & \omega=\omega_0. \end{cases}$$

Solution

$$\xi_2(t)=\begin{cases}\dfrac{eE\gamma_2}{2\sqrt{m}(2\omega_0^2-\omega^2)}\big[\cos(\omega t)-\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)\big], & \omega\neq\sqrt{2}\omega_0,\\ \dfrac{eE\gamma_2}{4\sqrt{2m}\,\omega_0}t\sin(\sqrt{2}\omega_0 t), & \omega=\sqrt{2}\omega_0.\end{cases}$$

从简正坐标返回原始坐标，

由 $\vec{\eta}=A\vec{\xi}$：

$$x(t)=\frac{1}{2\sqrt{m}}\big[\xi_1(t)+\sqrt{3}\,\xi_2(t)\big],\quad y(t)=\frac{1}{2\sqrt{m}}\big[\sqrt{3}\,\xi_1(t)-\xi_2(t)\big].$$

代入 ξ_1,ξ_2 表达式，即得微振动解。下面写出非共振情形的显式结果（共振情形类似可得）：

$$\begin{aligned}x(t)=&\frac{eE\gamma_1}{4m(\omega_0^2-\omega^2)}\big[\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)\big]\\&+\frac{eE\gamma_2\sqrt{3}}{4m(2\omega_0^2-\omega^2)}\big[\cos(\omega t)-\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)\big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y(t)=&\frac{eE\gamma_1\sqrt{3}}{4m(\omega_0^2-\omega^2)}\big[\cos(\omega t)-\cos(\omega_0 t)\big]\\&-\frac{eE\gamma_2}{4m(2\omega_0^2-\omega^2)}\big[\cos(\omega t)-\cos(\sqrt{2}\omega_0 t)\big],\end{aligned}$$

其中 $\gamma_1=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$, $\gamma_2=\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta$。

当 $\omega=\omega_0$ 或 $\omega=\sqrt{2}\omega_0$ 时，对应项需替换为共振形式，振幅随时间线性增长 (增长过多后微振动法不适用)。

11. 一维阻尼振子的运动方程为

$$m\ddot{\eta}+\mu\dot{\eta}+k\eta=0.$$

引进相空间矢量 $(\eta(t),\dot{\eta}(t))$，方程可以改写成

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\eta\\ \dot{\eta}\end{pmatrix}.$$

(1) 写出 2×2 矩阵 B。

(2) 化简时间演化矩阵 $\exp(Bt)$。

(3) 如果系统受到冲击力

$$Q(t)=\delta(t-t')$$

的作用，求格林函数 $G(t,t')$。

Solution

1.

由于

$$m\ddot{\eta} + \mu\dot{\eta} + k\eta = 0.$$

故

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\eta \\ \dot{\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta \\ \dot{\eta}\end{pmatrix}.$$

故

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\beta\end{pmatrix},$$

其中定义

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \beta = \frac{\mu}{2m}.$$

2.

需要计算矩阵指数 e^{Bt}。矩阵 B 的特征多项式为

$$\det(B - \lambda I) = \lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0.$$

特征值为

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

记

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (\text{欠阻尼情形}), \quad \Gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} \quad (\text{过阻尼情形}).$$

利用 Cayley-Hamilton 定理：设

$$e^{Bt} = c_0(t)I + c_1(t)B,$$

其中 $c_0(t), c_1(t)$ 待定。代入特征值 $\lambda_{1,2}$ 应满足：

$$e^{\lambda_j t} = c_0(t) + c_1(t)\lambda_j, \quad j = 1, 2.$$

情况 1：欠阻尼 $(\omega_0 > \beta)$，此时 $\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\omega$。联立方程：

$$e^{(-\beta+i\omega)t} = c_0 + c_1(-\beta + i\omega),$$

$$e^{(-\beta-i\omega)t} = c_0 + c_1(-\beta - i\omega).$$

解得

$$c_0(t) = e^{-\beta t}\left(\cos\omega t + \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right),$$

Solution

$$c_1(t) = \frac{e^{-\beta t}}{\omega} \sin \omega t.$$

情况 2：过阻尼 ($\beta > \omega_0$)，此时 $\lambda_{1,2} = -\beta \pm \Gamma$。解得

$$c_0(t) = \frac{1}{2} e^{-\beta t} \left[\left(1 + \frac{\beta}{\Gamma}\right) e^{\Gamma t} + \left(1 - \frac{\beta}{\Gamma}\right) e^{-\Gamma t} \right],$$

$$c_1(t) = \frac{e^{-\beta t}}{2\Gamma} \left(e^{\Gamma t} - e^{-\Gamma t}\right).$$

情况 3：临界阻尼 ($\beta = \omega_0$)，此时 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$。对情况二取极限，此时方程变为：

$$e^{-\beta t} = c_0 - \beta c_1, \quad t e^{-\beta t} = c_1.$$

解得

$$c_0(t) = e^{-\beta t}(1 + \beta t), \quad c_1(t) = t e^{-\beta t}.$$

3.

对于方程

$$m\ddot{\eta} + \mu\dot{\eta} + k\eta = \delta(t - t'),$$

定义格林函数 $G(t, t')$ 为满足零初条件（$\eta(t'^-) = 0, \dot{\eta}(t'^-) = 0$）的解。

我们这里采用拉普拉斯变换法

设 $\tau = t - t' \geq 0$，设 G 为所求的格林函数，考虑方程

$$m\ddot{G}(\tau) + \mu\dot{G}(\tau) + kG(\tau) = \delta(\tau), \quad \tau \geq 0,$$

初条件：$G(0^-) = 0, \dot{G}(0^-) = 0$。

对上述方程作拉普拉斯变换（记 $\mathcal{L}[G(\tau)] = \tilde{G}(s)$）：

$$\mathcal{L}[\ddot{G}(\tau)] = s^2\tilde{G}(s) - sG(0^-) - \dot{G}(0^-) = s^2\tilde{G}(s),$$

$$\mathcal{L}[\dot{G}(\tau)] = s\tilde{G}(s) - G(0^-) = s\tilde{G}(s),$$

$$\mathcal{L}[\delta(\tau)] = 1.$$

代入方程：

$$ms^2\tilde{G}(s) + \mu s\tilde{G}(s) + k\tilde{G}(s) = 1.$$

解得

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{ms^2 + \mu s + k} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s^2 + 2\beta s + \omega_0^2},$$

其中 $\omega_0^2 = k/m,\ \beta = \mu/(2m)$。

Solution

分三种情况求拉普拉斯逆变换：

情况 1：欠阻尼 ($\omega_0 > \beta$)

令 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$，则

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+\beta)^2 + \omega^2}.$$

查拉普拉斯变换表或利用公式：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+\beta)^2 + \omega^2}\right] = \frac{e^{-\beta\tau}}{\omega} \sin(\omega\tau) \cdot h(\tau).$$

故

$$G(\tau) = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{-\beta\tau}}{\omega} \sin(\omega\tau) \cdot h(\tau).$$

情况 2：过阻尼 ($\beta > \omega_0$)

令 $\Gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$，则

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+\beta)^2 - \Gamma^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2\Gamma} \left(\frac{1}{s+\beta-\Gamma} - \frac{1}{s+\beta+\Gamma}\right).$$

逆变换：

$$G(\tau) = \frac{1}{2m\Gamma} \left(e^{-(\beta-\Gamma)\tau} - e^{-(\beta+\Gamma)\tau}\right) h(\tau) = \frac{e^{-\beta\tau}}{m\Gamma} \sinh(\Gamma\tau) \cdot h(\tau).$$

情况 3：临界阻尼 ($\beta = \omega_0$)

此时

$$\tilde{G}(s) = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{(s+\beta)^2}.$$

逆变换：

$$G(\tau) = \frac{1}{m} \cdot \tau e^{-\beta\tau} \cdot h(\tau).$$

综上，格林函数为：

$$G(t,t') = h(t-t') \cdot \begin{cases} \dfrac{e^{-\beta(t-t')}}{m\omega} \sin[\omega(t-t')], & \omega_0 > \beta, \\ \dfrac{e^{-\beta(t-t')}}{m\Gamma} \sinh[\Gamma(t-t')], & \beta > \omega_0, \\ \dfrac{1}{m}(t-t')e^{-\beta(t-t')}, & \beta = \omega_0, \end{cases}$$

其中 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, $\Gamma = \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$，$\beta = \frac{\mu}{2m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$。

理论力学作业 24 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

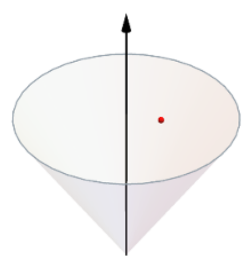
以下两题，选做其一：

5. 一个质点在重力作用下沿光滑圆锥面内运动。锥面竖直放置，锥顶朝下，锥面的半顶角为 α。以锥顶为原点，向上为 z-轴方向，记质点绕 z-轴的转角为 θ。

（1）写出系统的哈密顿函数 $H(z,\theta,p_z,p_\theta)$ 以及哈密顿方程。

（2）利用劳斯变换消去拉氏函数中的循环坐标，写出等效拉氏量 L_{eff}。

（3）利用求得的等效拉氏量写出拉氏方程。



Solution

1. 采用柱坐标 (r,θ,z)：

$$r = z\tan\alpha$$

质点速度在柱坐标系中：

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2$$

代入 $r = z\tan\alpha$, $\dot{r} = \dot{z}\tan\alpha$:

$$v^2 = \dot{z}^2\tan^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\dot{\theta}^2$$

动能为：

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\dot{\theta}^2\right)$$

势能（重力势能，原点在锥顶）：

$$V = mgz$$

Solution

拉格朗日函数：

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\dot{\theta}^2\right) - mgz$$

广义动量：

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\sec^2\alpha$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mz^2\tan^2\alpha\dot{\theta}$$

哈密顿函数：

$$H = p_z\dot{z} + p_\theta\dot{\theta} - L$$

由广义动量反解得：

$$\dot{z} = \frac{p_z\cos^2\alpha}{m}$$

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mz^2\tan^2\alpha}$$

代入哈密顿函数：

$$H = \frac{p_z^2\cos^2\alpha}{m} + \frac{p_\theta^2}{mz^2\tan^2\alpha} - \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{p_z\cos^2\alpha}{m}\right)^2\sec^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\left(\frac{p_\theta}{mz^2\tan^2\alpha}\right)^2\right] + mgz$$
$$= \frac{p_z^2\cos^2\alpha}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz$$

即：

$$H(z,\theta,p_z,p_\theta) = \frac{p_z^2\cos^2\alpha}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mz^2\tan^2\alpha} + mgz$$

哈密顿正则方程：

$$\dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z\cos^2\alpha}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{mz^2\tan^2\alpha}$$

$$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{p_\theta^2}{mz^3\tan^2\alpha} - mg, \quad \dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

2. 拉格朗日函数中 θ 为循环坐标，$p_\theta = mz^2\tan^2\alpha\dot{\theta}$ 为守恒量，记为常数 l：

$$p_\theta = l$$

$$\dot{\theta} = \frac{l}{mz^2\tan^2\alpha}$$

等效拉氏量 $L_{\text{eff}}(z,\dot{z}) = L(z,\dot{z}) - p_\theta\dot{\theta}$ 将 $\dot{\theta}$ 用 l 代入，故：

$$L_{\text{eff}}(z,\dot{z}) = \frac{1}{2}m\left(\dot{z}^2\sec^2\alpha + z^2\tan^2\alpha\left(\frac{l}{mz^2\tan^2\alpha}\right)^2\right) - mgz - \frac{l^2}{mz^2\tan^2\alpha}$$

Solution

$$= \frac{1}{2}m\dot{z}^2\sec^2\alpha - \frac{l^2}{2mz^2\tan^2\alpha} - mgz$$

3. 对 L_{eff} 写 Euler-Lagrange 方程：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial z} = 0$$

计算：

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}\sec^2\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{z}\sec^2\alpha\right) = m\ddot{z}\sec^2\alpha$$

$$\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial z} = \frac{l^2}{mz^3\tan^2\alpha} - mg$$

代入得：

$$m\ddot{z}\sec^2\alpha - \frac{l^2}{mz^3\tan^2\alpha} + mg = 0$$

6. 平面振子在直角坐标系的拉氏函数为

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2) - \frac{1}{2}k(x^2+y^2)$$

取极坐标系 (r,θ)，

（1）利用劳斯变换消去循环坐标，求等效拉氏量 $L_{\text{eff}}(r,\dot{r})$。

（2）求径向运动的平衡位置 a。

（3）求在平衡位置 $r=a$ 附近的微振动频率。

（4）与直角坐标系的振动频率对比，两者是否相同？

Solution

1. 取极坐标系：

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

速度分量：

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta$$

平方和：

$$\begin{aligned}\dot{x}^2+\dot{y}^2 &= (\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta)^2 \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

Solution

极坐标系下的拉氏函数：
$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{2}kr^2$$
广义动量：
$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$
由于 L 不显含 θ，θ 是循环坐标，p_θ 守恒。设 $p_\theta = l$（常数），则：
$$\dot{\theta} = \frac{l}{mr^2}$$
劳斯变换消去循环坐标 θ，等效拉氏函数为：
$$\begin{aligned}
L_{\text{eff}}(r,\dot{r}) &= L - p_\theta\dot{\theta} \\
&= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\left(\frac{l}{mr^2}\right)^2\right) - \frac{1}{2}kr^2 - \frac{l^2}{mr^2} \\
&= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 - \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}kr^2
\end{aligned}$$
2. 对 L_{eff} 写 Euler-Lagrange 方程：
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L_{\text{eff}}}{\partial r} = 0$$
即:
$$m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - kr$$
平衡位置由 $\ddot{r} = 0$ 给出：
$$\frac{l^2}{mr^3} - kr = 0$$
取正根（$r > 0$）：
$$a = \left(\frac{l^2}{mk}\right)^{1/4}$$
3. 在平衡位置 $r = a$ 附近作微振动 $r = a + \delta r$：其中 δr 为小量。
代入运动方程 $m\ddot{r} = \frac{l^2}{mr^3} - kr$，得：
$$m\delta\ddot{r} = \frac{l^2}{m(a+\delta r)^3} - k(a + \delta r)$$
舍去高阶小量：
$$m\delta\ddot{r} = \frac{l^2}{ma^3}(1 - 3\frac{\delta r}{a}) - k(a + \delta r)$$
代入 $a = \left(\frac{l^2}{mk}\right)^{1/4}$ 得：

Solution

$$m\delta\ddot{r} = \frac{4k}{m}\delta r$$

微振动角频率：

$$\omega_r = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

4. 在直角坐标系中，运动方程为：

$$m\ddot{x} + kx = 0, \quad m\ddot{y} + ky = 0$$

振动频率均为：

$$\omega_{x,y} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

极坐标系径向微振动频率是直角坐标系频率的 2 倍。因为直角坐标系下是两个独立的简谐振动，而半径 r 的运动表现为总运动，是这两个分运动合成。

7. 设快子在给定的电磁外场中运动，写出系统的哈密顿函数和正则方程。

Solution

电磁场中快子的拉格朗日量为：

$$L = m\sqrt{\dot{\vec{x}}^2 - 1} + q(\vec{A}\cdot\dot{\vec{x}} - \phi),$$

广义动量

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \frac{m\dot{\vec{x}}}{\sqrt{\dot{\vec{x}}^2 - 1}} + q\vec{A}.$$

反解得到：

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 - m^2}}$$

故哈密顿函数为：

$$\begin{aligned} H &= \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L \\ &= \sqrt{\left(\vec{p} - q\vec{A}(\vec{x},t)\right)^2 - m^2} + q\phi(\vec{x},t) \end{aligned}$$

哈密顿正则方程为：

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 - m^2}}$$

Solution

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{p}} &= -\frac{\partial H}{\partial \vec{x}} \\
&= -\frac{\partial H}{\partial \vec{A}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} - q\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}} \\
&= \frac{q(\vec{p} - q\vec{A})}{\sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 - m^2}} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{x}} - q\frac{\partial \phi}{\partial \vec{x}}
\end{aligned}$$

理论力学作业 26 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

10. 一个哈密顿系统的正则函数是

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + apx$$

利用泊松括号求级数解。

Solution

$$[x, H] = p + ax, \quad [p, H] = -x - ap.$$

$$[[x, H], H] = [p + ax, H] = (a^2 - 1)x,$$

$$[[p, H], H] = [-x - ap, H] = (a^2 - 1)p.$$

由此得递推关系:

$$\frac{d^{2n+1}x}{dt^{2n+1}} = (p + ax)(a^2 - 1)^n$$

$$\frac{d^{2n}x}{dt^{2n}} = (a^2 - 1)^n x$$

对 p 也同理。由泰勒展开：

$$x(t) = x_0 \left[1 + \frac{(a^2-1)t^2}{2!} + \frac{(a^2-1)^2 t^4}{4!} + \cdots\right] + (p_0 + ax_0)\left[t + \frac{(a^2-1)t^3}{3!} + \cdots\right].$$

$$p(t) = p_0 \left[1 + \frac{(a^2-1)t^2}{2!} + \frac{(a^2-1)^2 t^4}{4!} + \cdots\right] - (x_0 + ap_0)\left[t + \frac{(a^2-1)t^3}{3!} + \cdots\right].$$

即：

$$x(t) = \begin{cases} x_0 \cos\left(t\sqrt{1-a^2}\right) + \dfrac{p_0 + ax_0}{\sqrt{1-a^2}} \sin\left(t\sqrt{1-a^2}\right), & a^2 < 1, \\ x_0 \cosh\left(t\sqrt{a^2-1}\right) + \dfrac{p_0 + ax_0}{\sqrt{a^2-1}} \sinh\left(t\sqrt{a^2-1}\right), & a^2 > 1. \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \cos\left(t\sqrt{1-a^2}\right) - \dfrac{x_0 + ap_0}{\sqrt{1-a^2}} \sin\left(t\sqrt{1-a^2}\right), & a^2 < 1, \\ p_0 \cosh\left(t\sqrt{a^2-1}\right) - \dfrac{x_0 + ap_0}{\sqrt{a^2-1}} \sinh\left(t\sqrt{a^2-1}\right), & a^2 > 1. \end{cases}$$

11. 计算

$$[L^2, L_k] = ? \quad [x_j, L_k] = ? \quad [p_j, L_k] = ? \quad [x^2, L_k] = ? \quad [p^2, L_k] = ? \quad [\vec{p}\cdot\vec{x}, L_k] = ?$$

Solution

1. $[L^2, L_k]$

角动量平方 L^2 与角动量分量 L_k 的泊松括号为：

$$[L^2, L_k] = \sum_{i=1}^{3}[L_i^2, L_k] = (L_i[L_i, L_k] + [L_i, L_k]L_i)\,.$$

下面证明角动量的泊松括号关系：

$$\begin{aligned}
[L_i, L_k] &= [\varepsilon_{ijl}x_j P_l, \varepsilon_{kmn}x_m P_n] \\
&= \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{kmn}[x_j P_l, x_m P_n] \\
&= \varepsilon_{ijl}\varepsilon_{kmn}(P_l x_m \delta_{jn} - x_j P_n \delta_{ml}) \\
&= (\delta_{ik}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{kl})P_l x_m + (\delta_{ik}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{kj})x_j P_n \\
&= x_i P_k - x_k P_i \\
&= \varepsilon_{ikm}L_m
\end{aligned}$$

得：

$$[L^2, L_k] = (L_i\varepsilon_{ikm}L_m + \varepsilon_{ikm}L_m L_i) = 2\varepsilon_{ikm}L_i L_m = 0$$

最后一个等号是因为 ε_{ikm} 对指标 i 和 m 反对称，而 $L_i L_m$ 对称。

2. $[x_j, L_k]$

$$[x_j, L_k] = \varepsilon_{kmn}[x_j, x_m p_n] = \varepsilon_{kmn}x_m\delta_{jn} = \varepsilon_{jkm}x_m.$$

3. $[p_j, L_k]$

类似地：

$$[p_j, L_k] = \varepsilon_{kmn}[p_j, x_m p_n] = \varepsilon_{kmn}(-\delta_{jm})p_n = -\varepsilon_{kjn}p_n = \varepsilon_{jkn}p_n$$

4. $[x^2, L_k]$

$$[x^2, L_k] = \sum_i [x_i^2, L_k] = 2x_i[x_i, L_k] = 2x_i\varepsilon_{ikm}x_m = 0$$

5. $[p^2, L_k]$

类似地：

$$[p^2, L_k] = \sum_i [p_i^2, L_k] = 2p_i[p_i, L_k] = 2p_i\varepsilon_{ikm}p_m = 0.$$

Solution

6. $[\vec{p}\cdot\vec{x}, L_k]$

$$[\vec{p}\cdot\vec{x}, L_k] = [p_i x_i, L_k] = (p_i[x_i, L_k] + x_i[p_i, L_k]) \,.$$

代入前结果：

$$[\vec{p}\cdot\vec{x}, L_k] = (p_i\varepsilon_{ikm}x_m + x_i\varepsilon_{ikm}p_m) = \varepsilon_{ikm}(p_i x_m + x_i p_m) = 0$$

理论力学作业 28 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

16. 用可积条件判断

$$q = 2\sqrt{Q}\cos P, \quad p = \sqrt{Q}\sin P$$

是否为正则变换。

Solution

$$dq = -2\sqrt{Q}\sin PdP + \frac{1}{\sqrt{Q}}\cos PdQ$$

$$dp = \sqrt{Q}\cos PdP + \frac{1}{2\sqrt{Q}}\sin PdQ$$

$$dq \wedge dp = -\sin^2 PdP \wedge dQ + \cos^2 PdQ \wedge dP = dQ \wedge dP$$

故该变换为正则变换

17. 设

$$F_1 = \frac{1}{2}q_a q_a + \frac{1}{2}Q_a Q_a$$

这个生成函数能否给出正则变换？

Solution

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_\alpha \partial Q_\beta} = 0$$

故该生成函数不为自由生成函数，即无法给出正则变换。

18. 根据母函数

$$F_2 = \frac{1}{2}q\sqrt{-2P - q^2} + P\arccos\frac{q}{\sqrt{-2P}}$$

（1）写出正则变换 $Q(t,q,p), P(t,q,p)$。

（2）这个正则变换是否存在第一类、第三类和第四类母函数？若存在，请写出来表达式。

Solution

1.

已知第二类母函数：

$$F_2(q,P)=\frac{1}{2}q\sqrt{-2P-q^2}+P\arccos\frac{q}{\sqrt{-2P}}.$$

由

$$p_\alpha=\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha},\quad Q_\alpha=\frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha},$$

得：

$$p=\frac{1}{2}\sqrt{-2P-q^2}-\frac{q^2}{2\sqrt{-2P-q^2}}-P\frac{1}{\sqrt{-2P-q^2}}=\sqrt{-2P-q^2}$$

$$Q=\frac{1}{2}q\frac{-1}{\sqrt{-2P-q^2}}-P\frac{q(-2P)^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-\frac{q^2}{-2P}}}+\arccos\frac{q}{\sqrt{-2P}}=\arccos\frac{q}{\sqrt{-2P}}$$

反解得正则变换：

$$Q=\arccos\frac{q}{\sqrt{q^2+p^2}},\quad P=-\frac{1}{2}(q^2+p^2).$$

2. 根据 $\frac{\partial Q}{\partial p},\frac{\partial Q}{\partial q},\frac{\partial P}{\partial q}\neq 0,\infty$，因此存在第一三四类母函数。（下面计算生成函数时注意自变量的选取）

第一类：

$$\begin{aligned}F_1(q,Q)=F_2-PQ=&\frac{1}{2}qp-\frac{1}{2}(q^2+p^2)arccos\frac{q}{\sqrt{q^2+p^2}}-(-\frac{1}{2})(p^2+q^2)arccos\frac{q}{\sqrt{q^2+p^2}}\\=&\frac{1}{2}pq=\frac{1}{2}q^2\tan Q\end{aligned}$$

第三类：

$$F_3(Q,p)=F-pq=-\frac{1}{2}pq=-\frac{1}{2}p^2\cot Q$$

第四类：

$$F_4(p,P)=F-pq+PQ=-\frac{1}{2}p\sqrt{-2P-p^2}+Parccos\sqrt{\frac{2P+p^2}{2P}}$$

理论力学作业 30 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

22. 船上放着一个摆钟，若在行程末重力加速度增大了 1/1000，则振幅改变多少？

Solution

这里利用朱老师讲义第 46 页的结论，单摆的绝热不变量为：

$$J_\theta = \frac{1}{2} m g^{\frac{1}{2}} l^{\frac{3}{2}} \theta_0^2$$

即单摆振幅 $\theta_0 \propto g^{-\frac{1}{4}}$，故

$$(g+\Delta g)^{-\frac{1}{4}} \approx g - \frac{1}{4}\Delta g = g(1-\frac{1}{4}\frac{\Delta g}{g}) = g(1-\frac{1}{4000})$$

所以振幅减小 $\frac{1}{4000}$

1.
(1) 写出矩阵 $A = \vec{\psi}\cdot\vec{X}$ 的三个特征值。
(2) 求矩阵函数 $f(A)$ 的三个特征值以及 $\det f(A)$。
(3) 计算行列式

$$\det\left(\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-1}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\right)$$

Solution

(1)

$$A = \vec{\psi}\cdot\vec{X} = \psi\hat{n}\cdot\vec{X} = \psi\begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = \begin{vmatrix} \lambda & \psi n_3 & -\psi n_2 \\ -\psi n_3 & \lambda & \psi n_1 \\ \psi n_2 & -\psi n_1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + \psi^2\lambda = 0$$

Solution

所以 A 的特征值为 $0, i\psi, -i\psi$

(2)

设 $f(A)=\Sigma_i c_i A^i$，对 A 的特征值有 $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$，则

$$f(A)\vec{v}=\Sigma_i c_i A^i\vec{v}=\Sigma_i c_i \lambda^i\vec{v}=f(\lambda)\vec{v}$$

故 $f(A)$ 特征值为 $f(0), f(i\psi), f(-i\psi)$，$det f(A)=f(0)f(i\psi)f(-i\psi)$

(3)

由第 (2) 问得：

$$\det\left(\frac{e^{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}-1}{\vec{\psi}\cdot\vec{X}}\right)=1\cdot\left(\frac{e^{i\psi}-1}{i\psi}\right)\cdot\left(\frac{e^{-i\psi}-1}{-i\psi}\right)=\frac{4sin^2\frac{\psi}{2}}{\psi^2}$$

此题选做，不计作业成绩。

2. 证明转动角 ψ、转动轴和与转动矩阵 R 的关系式：

$$\psi=\arccos\left(\frac{\mathrm{Tr}\,R-1}{2}\right)$$

$$n_j=\frac{\mathrm{Tr}\left(X_j(R^T-R)\right)}{2\sqrt{3+2\,\mathrm{Tr}\,R-(\mathrm{Tr}\,R)^2}}$$

Solution

根据 Rodrigues 公式，

$$R(\vec{\psi})=1\cos\psi+\hat{n}\hat{n}^T(1-\cos\psi)+X_n\sin\psi$$

又 $Tr(X_n)=0$,$Tr(\hat{n}\hat{n}^T)=1$，故

$$Tr(R)=3\cos\psi+1-\cos\psi$$

得

$$\psi=\arccos\left(\frac{TrR-1}{2}\right)$$

由 Rodrigues 公式可得

$$R^T-R=-2\sin\psi\, X_n$$

两边与 X_j 取迹：

$$Tr\big(X_j(R^T-R)\big)=-2\sin\psi\, n_i\, Tr(X_jX_i).$$

Solution

利用生成元的正交关系

$$Tr(X_iX_j) = -2\delta_{ij},$$

得到

$$Tr\big(X_j(R^T - R)\big) = 4\sin\psi\, n_j.$$

另一方面，由前述结果

$$\cos\psi = \frac{TrR - 1}{2},$$

有

$$\sin^2\psi = 1 - \cos^2\psi = \frac{3 + 2TrR - (TrR)^2}{4}.$$

因此

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{3 + 2TrR - (TrR)^2}}{2}.$$

故

$$n_j = \frac{Tr\big(X_j(R^T - R)\big)}{2\sqrt{3 + 2TrR - (TrR)^2}}$$

3. 绕轴

$$\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$$

逆时针旋转 $\xi = 45°$ 的转动矩阵是

$$R = e^{\xi\vec{n}\cdot\vec{X}}$$

求 R 对应的欧拉角参数 (ϕ, θ, ψ)。

Solution

由 Rodrigues 公式

$$R = \mathbf{1} + \sin\xi\, X_n + \hat{n}\hat{n}^T(1 - \cos\xi)$$

代入 $\sin\xi = \cos\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}$，得

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

采用 z–x–z 欧拉角分解

$$R = R_z(\phi)R_y(\theta)R_z(\psi).$$

Solution

由

$$\cos\theta = R_{33} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

再由

$$R_{13} = \sin\phi\sin\theta, \qquad R_{23} = -\cos\phi\sin\theta$$

得

$$\phi = \frac{\pi}{4}.$$

最后由

$$R_{31} = \sin\theta\sin\psi, \qquad R_{32} = \sin\theta\cos\psi$$

得

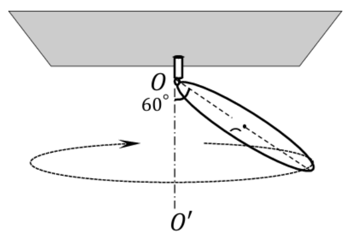
$$\psi = -\frac{\pi}{4}.$$

$$(\phi, \theta, \psi) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

理论力学作业 32 参考答案

助教：张积翔、于洪飞

7. 质量为 m、半径为 a 的均质圆环上的一点由铰链固定在天花板上的 O 点。设 OO' 是向下的竖直垂线，圆环中心为 C 点。圆环运动时始终有 $\angle COO' = 60°$, 且圆环所处的平面始终与 $\angle COO'$ 所在的平面相垂直。



(1) 求圆环定点转动的角速度；

(2) 求圆环角动量的大小；

(3) 求圆环所受 O 点的作用力。

Solution

(1)

由题知刚体以竖直轴 $\hat{\mathbf{z}}$ 作匀速转动（进动），设角速度

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{\mathbf{z}}, \qquad \theta = 60°$$

在刚体上取一组主轴：令 $\mathbf{e}_3 \parallel OC$，令 $\mathbf{e}_1$ 为圆环平面法向，并令 $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$。则根据欧拉运动学方程将角速度和欧拉角相联系：

$$\omega_1 = \dot{\phi}\sin\theta,\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta.$$

下面求转动惯量，薄圆环在质心 C 处：

$$I_{C,\perp} = ma^2, \qquad I_{C,\mathrm{diam}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

Solution

又 $|OC|=a$，平行轴定理给出关于 O 的主转动惯量

$$I_1 = I_{C,\perp} + ma^2 = 2ma^2, \qquad I_3 = I_{C,\text{diam}} = \frac{1}{2}ma^2.$$

于是角动量

$$\mathbf{J} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3.$$

该系统所受力矩只由重力提供，重力对 O 的力矩为 $\boldsymbol{\tau} = \overrightarrow{OC} \times mg\,\hat{\mathbf{z}}$，其大小

$$\tau = mga\sin\theta.$$

由于刚体以 $\hat{\mathbf{z}}$ 匀速转动，$\mathbf{J}$ 亦绕 $\hat{\mathbf{z}}$ 匀速转动，因此

$$\dot{\mathbf{J}} = \dot{\phi}\,\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}.$$

注意 $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J} \parallel \mathbf{e}_2$，大小为：

$$|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}| = \Big|(\sin\theta\,\mathbf{e}_1 + \cos\theta\,\mathbf{e}_3) \times (I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3)\Big| = \dot{\phi}\,\sin\theta\cos\theta\,(I_1 - I_3).$$

由 $\tau = |\dot{\mathbf{J}}| = \dot{\phi}\,|\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{J}|$ 得

$$mga\sin\theta = \dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta\,(I_1 - I_3) \quad \Rightarrow \quad \dot{\phi}^2 = \frac{mga}{(I_1 - I_3)\cos\theta}.$$

取 $\theta = 60^\circ$, $I_1 = 2ma^2$, $I_3 = \frac{1}{2}ma^2$，得

$$\dot{\phi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{g}{a}}$$

故角速度为：

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}},\ \omega_2 = 0,\ \omega_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{g}{a}}$$

(2)

由 $\mathbf{J} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$，

$$|\mathbf{J}|^2 = (I_1\omega_1)^2 + (I_3\omega_3)^2.$$

代入 $\omega_1 = \dot{\phi}\sin 60^\circ$, $\omega_3 = \dot{\phi}\cos 60^\circ$ 及上问 $\dot{\phi}$，故圆环角动量大小为

$$|\mathbf{J}| = \frac{7}{2\sqrt{3}}\,ma^2\sqrt{\frac{g}{a}}$$

(3)

质心 C 绕竖直轴作匀速圆周运动，其轨道半径 $r = a\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，

Solution

故向心加速度大小

$$a_C = \dot{\phi}^2 r = \frac{2\sqrt{3}}{3} g.$$

质心牛顿方程 $m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}_O + mg\,\hat{\mathbf{z}}$。由于 $\mathbf{a}_C$ 水平，竖直方向有

$$F_{O,z} = mg \quad (\text{向上}).$$

水平方向有

$$|\mathbf{F}_{O,\perp}| = ma_C = \frac{2\sqrt{3}}{3} mg \quad (\text{指向竖直轴}).$$

因此

$$|\mathbf{F}_O| = \sqrt{F_{O,z}^2 + |\mathbf{F}_{O,\perp}|^2} = \sqrt{m^2 g^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} mg\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3} mg$$

8. 质量为 m 的拉格朗日陀螺，即重力场中绕定点转动的对称重陀螺，三个主转动惯量为 $I_1 = I_2 \neq I_3$, 质心到固定点的距离为 l。

(1) 选取三个欧拉角作为广义坐标，写出哈密顿函数 $H(\phi, \theta, \psi, p_\phi, p_\theta, p_\psi)$;

(2) 利用哈密顿–雅可比方程，求哈密顿主函数 $S(t, \phi, \theta, \psi)$ （可保留积分形式，无需求积）。

Solution

(1)

取欧拉角 (ϕ, θ, ψ)，由讲义（拉格朗日陀螺）可写拉氏量

$$L = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2\theta\right) + \frac{I_3}{2}\left(\cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi}\right)^2 - mgl\cos\theta.$$

相应正则动量为

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I_1 \dot{\theta},$$

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi}),$$

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_1 \dot{\phi}\sin^2\theta + I_3(\cos\theta\,\dot{\phi} + \dot{\psi})\cos\theta$$

由此解出速度：

$$\dot{\theta} = \frac{p_\theta}{I_1}, \qquad \dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{I_1 \sin^2\theta}, \qquad \dot{\psi} = \frac{p_\psi}{I_3} - \cos\theta\,\dot{\phi}$$

Solution

由定义 $H=\sum p_i\dot{q}_i-L$，代入上式并化简得

$$H(\phi,\theta,\psi,p_\phi,p_\theta,p_\psi)=\frac{p_\theta^2}{2I_1}+\frac{(p_\phi-p_\psi\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{p_\psi^2}{2I_3}+mgl\cos\theta$$

(2)

Hamilton–Jacobi 方程为

$$\frac{\partial S}{\partial t}+H\left(\phi,\theta,\psi,\frac{\partial S}{\partial\phi},\frac{\partial S}{\partial\theta},\frac{\partial S}{\partial\psi}\right)=0$$

由于 H 不含 ϕ,ψ，记 α,β,E 为积分常数（对应 $p_\phi=\alpha$，$p_\psi=\beta$）

$$S(t,\phi,\theta,\psi)=-Et+\alpha\,\phi+\beta\,\psi+W(\theta)$$

代入受限 HJ 方程得

$$\frac{1}{2I_1}\left(\frac{dW}{d\theta}\right)^2+\frac{(\alpha-\beta\cos\theta)^2}{2I_1\sin^2\theta}+\frac{\beta^2}{2I_3}+mgl\cos\theta=E$$

故

$$\frac{dW}{d\theta}=\pm\sqrt{2I_1\left(E-\frac{\beta^2}{2I_3}-mgl\cos\theta\right)-\frac{(\alpha-\beta\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$$

于是哈密顿主函数为

$$S(t,\phi,\theta,\psi)=-Et+\alpha\phi+\beta\psi\pm\int d\theta\sqrt{2I_1\left(E-\frac{\beta^2}{2I_3}-mgl\cos\vartheta\right)-\frac{(\alpha-\beta\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}}$$

9. 一个均匀圆锥体的密度为 ρ，底部圆半径为 R，高为 h。

(1) 求相对于圆锥顶点的主转动惯量 I_1，I_2，I_3 （其中 I_3 对应圆锥的对称轴）；

(2) 以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺的拉氏量及三个守恒量（可以把 $I_1=I_2=I$ 和 I_3 当作已知常数，无需把上题结果代入）；

(3) 重对称陀螺能够均匀进动（章动角 θ 和进动角速度 $\dot{\phi}$ 保持不变）。以圆锥顶点为固定点，求该重对称陀螺可以均匀进动的角速度 $\dot{\phi}$，并给出存在均匀进动的条件（表达式中保留 J_3 和章动角 θ）。

Solution

(1)

绕对称轴 z 的转动惯量 I_3：

$$I_3=\int_0^h \frac{1}{2}r^2\,dm=\int_0^h \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{h^2}z^2\right)\left(\rho\pi\frac{R^2}{h^2}z^2\,dz\right)=\frac{\rho\pi R^4}{2h^4}\int_0^h z^4\,dz=\frac{\rho\pi R^4}{2h^4}\cdot\frac{h^5}{5}=\frac{\rho\pi R^4 h}{10}.$$

又圆锥总质量

$$m=\rho\cdot\frac{1}{3}\pi R^2 h \quad\Rightarrow\quad \rho\pi h=\frac{3m}{R^2},$$

代入得

$$I_3=\frac{3}{10}mR^2$$

过顶点且垂直对称轴的转动惯量 $I_1=I_2$：取 x 轴过顶点且垂直 z 轴, 对高度 z 处薄圆盘，其关于通过圆盘中心、平行于 x 的直径轴的转动惯量为

$$dI_{x,\mathrm{cm}}=\frac{1}{4}dm\,r^2$$

而顶点轴与该直径轴相距 z，由平行轴定理

$$dI_1=dI_{x,\mathrm{cm}}+dm\,z^2=\frac{1}{4}dm\,r^2+dm\,z^2$$

因此

$$I_1=\int_0^h\left(\frac{1}{4}r^2\,dm+z^2\,dm\right)=\int_0^h\left[\frac{1}{4}\left(\frac{R^2}{h^2}z^2\right)+z^2\right]\left(\rho\pi\frac{R^2}{h^2}z^2\,dz\right).$$

化简为

$$I_1=\rho\pi\int_0^h z^4\left(\frac{R^4}{4h^4}+\frac{R^2}{h^2}\right)dz=\rho\pi\left(\frac{R^4}{4h^4}+\frac{R^2}{h^2}\right)\frac{h^5}{5}=\rho\pi\left(\frac{R^4 h}{20}+\frac{R^2h^3}{5}\right).$$

仍用 $\rho\pi h=\frac{3m}{R^2}$，得

$$I_1=I_2=\frac{3m}{R^2}\left(\frac{R^4}{20}+\frac{R^2h^2}{5}\right)=\frac{3m}{20}\left(R^2+4h^2\right).$$

(2)

圆锥为重对称陀螺，取欧拉角 (ϕ,θ,ψ)，并记 $I_1=I_2=I$。则拉氏量可写为

$$L=\frac{I}{2}(\dot\theta^2+\dot\phi^2\sin^2\theta)+\frac{I_3}{2}\left(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta\right)^2-mgl\cos\theta$$

相应的正则动量

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}=I\dot\theta,$$

$$p_\psi=\frac{\partial L}{\partial\dot\psi}=I_3(\dot\psi+\dot\phi\cos\theta)=J_3=\mathrm{const}$$

Solution

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot\phi} = I\dot\phi\sin^2\theta + J_3\cos\theta = J_z = \text{const}$$

由于 L 不显含 t，能量守恒：

$$E = \frac{I}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\phi^2\sin^2\theta\right) + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta = \text{const}$$

(3)

均匀进动定义为

$$\dot\theta = 0, \qquad \dot\phi = \text{const}.$$

由守恒量

$$p_\psi = I_3(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = J_3 = \text{const}, \qquad p_\phi = I\dot\phi\sin^2\theta + J_3\cos\theta = J_z = \text{const}.$$

故可解出

$$\dot\phi = \frac{J_z - J_3\cos\theta}{I\sin^2\theta}, \qquad \dot\psi = \frac{J_3}{I_3} - \dot\phi\cos\theta.$$

代入能量守恒的表达式中，得到等效势 $V_{eff}(\theta)$

$$E = \frac{I}{2}\dot\theta^2 + \frac{(J_z - J_3\cos\theta)^2}{2I\sin^2\theta} + \frac{J_3^2}{2I_3} + mgl\cos\theta \equiv \frac{I}{2}\dot\theta^2 + V_{eff}(\theta)$$

故当 $E = minV_{eff}(\theta)$ 时，$\dot\theta = 0$，即均匀进动，此时对应的 θ 使得 $\frac{dV_{eff}(\theta)}{d\theta} = 0$，化简得

$$I\cos\theta\,\dot\phi^2 - J_3\dot\phi + mgl = 0.$$

因此均匀进动角速度为

$$\dot\phi = \frac{J_3 \pm \sqrt{J_3^2 - 4Imgl\cos\theta}}{2I\cos\theta}$$

存在均匀进动（实数解）的条件为

$$J_3^2 \geq 4Imgl\cos\theta$$