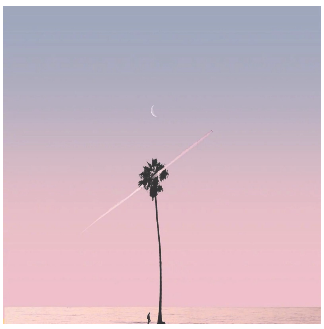
数学分析 (B2)
复习讲义



作者：张积翔

时间：2025 年 4 月 20 日

琴弦天籁寄相思，大钧玄秘在，物数竟同归

目录

第 1 章 第一次：期中前复习

1.1 知识框架

1.1.1 空间解析几何

① 向量的基本运算

1. 点乘：$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta(\vec{a},\vec{b})$.
2. 叉乘：$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$，其中 $|\vec{c}|=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta(\vec{a},\vec{b})$，其方向由于右手螺旋定则确定。坐标表示：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\hat{x}&\hat{y}&\hat{z}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

3. (a) $\vec{a},\vec{b}$ 共线的充要条件：$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.
   (b) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 共面的充要条件：$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$.

② 平面方程的构建

常见的构建方式有三种：

1. 截距式:
$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$$
2. 点法式：$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PP_0}=0$，其中点 P_0,P 分别为平面上的定点和动点。通常设法找到该平面上的两个向量，利用叉乘构建 $\vec{n}$.
3. 一般式：适用于实设定直线的平面。若该直线给的是交面式，则为：
$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0,\ i=1,2$$

③ 直线方程的构建

核心为方向向量，通常设法找到直线某一法平面内两个向量，利用叉乘构建方向向量。根据方向向量得到直线点向式。

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

对于题设为平面交线的直线，也会使用表达更简便的交面式。

④ 空间中的位置关系

1. 平面间：平面平行即 $\vec{n_1}//\vec{n_2}$ 正交即 $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$。总之，平面间夹角通过法向量夹角计算。

2. 直线间：通过方向向量的夹角判断平行、正交、异面等。
3. 直线与平面：通过法向量与方向向量判断。

⑤ 空间中的距离计算

原始公式：平面 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$ 和直线 $d=\dfrac{|\overrightarrow{P_0P}\times\vec{r}|}{|\vec{r}|}$

1. 点面距离：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
2. 点线距离：$d=\dfrac{|(x_0-x_0',y_0-y_0',z_0-z_0')\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.
3. 平行平面间距离：$d=\dfrac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.
4. 平行直线间距离：$d=\dfrac{|(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)\times(l,m,n)|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$.
5. 异面直线间距离：$d=\dfrac{|(\vec{r}_1\times\vec{r}_2)\cdot(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)|}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_2|}$.

⑥ 常见二次曲面的识别

1. **柱面**：平面上的曲线沿垂直于平面的直线平移生成的曲面。$F(x,y)=0$.
2. **锥面**：顶点到面上的点的矢量具有齐次性，因而表达式具有齐次性。
3. **旋转曲面**：绕某轴旋转则表达式中平行平面的坐标以半径的形式出现，以 Z 轴为例：$F(\sqrt{x^2+y^2},z)=0$.
4. **椭球面**：$x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.
5. **双曲面**：$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=\pm1$，其中单叶和双叶分别对应于 $+1$ 和 -1，也可通过 z=0 时是否有解判断。
6. **椭圆抛物面**：$z=x^2/a^2+y^2/b^2$.
7. **双曲抛物面**：$z=x^2/a^2-y^2/b^2$.

⑦ 常用空间坐标系

柱坐标系：

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{x^2+y^2},\\ \varphi=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right),\\ z=z\end{cases}\iff\begin{cases}x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi,\\ z=z\end{cases}$$

球坐标系：

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right), \\ \varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

1.1.2 多变量函数的微分学

① 多变量函数的连续与极限

1. 极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$，极限具有唯一性，可选取不同的趋近方式证明不存在。
2. 连续性：$\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = M_0$，连续多元函数具有介值定理和最值定理。

② 多变量函数的微分与导数

1. 偏导数:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$
2. 可微性：应满足
$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) - \Delta x f'_x - \Delta y f'_y = o(\rho)$$
其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$，即以局部平面代替曲面时偏差应为 $o(\rho)$。
3. 函数可微、连续、偏导的关系：偏导数连续则函数可微，函数可微则偏导数存在，函数可微则函数连续。

例题 1.1 设函数 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$ 证明：

(1) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

(2) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的偏导数存在，即 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 都存在。

(3) $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

(4) $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。

证明 (1) 因为
$$0 < \left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leqslant x^2+y^2 \to 0 \quad (x\to 0, y\to 0),$$
故
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0),$$
即 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续。

(2) 由偏导数的定义得

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}{x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2\sin\frac{1}{\sqrt{y}}}{y}=0.$$

(3) 因为 $f(0,0)=0$, $f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，且

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

即

$$f(x,y)-f(0,0)=f_x'(0,0)x+f_y'(0,0)y+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\quad(x\to 0,y\to 0),$$

由可微的定义知，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微。

(4) 因为

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

而 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 不存在，故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x'(x,y)$ 不存在，因此 $f_x'(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续。

同理可得

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处也不连续。

③ 复合函数偏导数

1. 链式法则：(1) 设 $u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ 在点 (x,y) 处存在偏导数, $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 处可微, 则复合函数 $z=f(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ 在点 (x,y) 处存在偏导数, 且
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}$$
其中，u,v 为中间变量，x,y 为自变量。
2. 一阶微分形式不变性：无论 x,y 为自变量还是中间变量，均有：
$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$
3. 方向导数: 设 V 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个区域,函数 $u=f(x,y,z)$ 定义在 V 上,$l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

是单位向量，$M_0(x_0,y_0,z_0)\in V$，过 M_0 且以 l 为方向的直线 L 的参数方程：

$$x=x_0+t\cos\alpha,\quad y=y_0+t\cos\beta,\quad z=z_0+t\cos\gamma,\quad t>0.$$

其中，α,β,γ 分别为 l 与 x 轴，y 轴及 z 轴的正向夹角。若极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{f(M_0+tl)-f(M_0)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+t\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在，称它为 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 处沿方向 l 的方向导数，记为 $\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_{M_0}$.

设 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ 处可微，则 $f(x,y,z)$ 在点 M_0 处沿任何方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数都存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}\right|_{M_0}=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_{M_0}$$

注 (1) $f(x,y,z)$ 可微，则 $f(x,y,z)$ 沿任何方向的方向导数都存在。

(2) 但任意方向导数存在，$f(x,y,z)$ 未必可微

4. 梯度:

$$\boldsymbol{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

若 f 可微，方向向量单位化，则方向导数为:

$$\frac{\partial f}{\partial\vec{l}}=\boldsymbol{\nabla} f\cdot\vec{l}$$

例题 1.2 试证方程

$$u''_{xx}+2u''_{xy}\cos x-u''_{yy}\sin^2 x-u'_y\sin x=0$$

经变换

$$\begin{cases}\xi=x-\sin x+y,\\ \eta=x+\sin x-y\end{cases}$$

后变为方程 $u''_{\xi\eta}=0$.

证明 将 x,y 作为中间变量，ξ,η 作为自变量，反变换得到如下关系：

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\\ y=\frac{1}{2}(\xi-\eta)+\sin\frac{\xi+\eta}{2},\end{cases}$$

于是

$$u'_\xi=u'_x\cdot x'_\xi+u'_y\cdot y'_\xi=\frac{1}{2}u'_x+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\xi+\eta}{2}\right)u'_y,$$

$$\begin{aligned}u''_{\xi\eta}=&\frac{1}{2}(u''_{xx}\cdot x'_\eta+u''_{xy}\cdot y'_\eta)-\frac{1}{4}\sin\frac{\xi+\eta}{2}u'_y\\&+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{\xi+\eta}{2}+\frac{1}{2}\right)(u''_{yx}\cdot x'_\eta+u''_{yy}\cdot y'_\eta)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}u''_{xx} + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{\xi+\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)u''_{xy}\right] - \frac{1}{4}\sin\frac{\xi+\eta}{2}u'_y \\
&\quad + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{\xi+\eta}{2} + \frac{1}{2}\right)\left[\frac{1}{2}u''_{xy} + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{\xi+\eta}{2} - \frac{1}{2}\right)u''_{yy}\right] \\
&= \frac{1}{4}(u''_{xx} + 2u''_{xy}\cos x - u''_{yy}\sin^2 x - u'_y \sin x) = 0.
\end{aligned}
$$

④ 隐函数的微分

核心方法是对约束方程取微分。

1. 对于满足单一约束条件 $F(x_1,\cdots,x_n)=0$ 的变量组来说，若偏导数存在，则

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial_j F}{\partial_i F},\ i \neq j$$

2. 对于双重约束的情形：

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0, \\ G(x,y,u,v)=0. \end{cases}$$

若计算 du 或 u_x, u_y 都需要计算，应将 du 视为一个整体，对方程组取微分即可：

$$\begin{cases} F_x dx + F_y dy + F_u du + F_v dv = 0, \\ G_x dx + G_y dy + G_u du + G_v dv = 0, \end{cases}$$

可利用线性代数简化上述方程组的计算难度。

3. 两个常用的偏微分公式（利用隐函数求导法则容易证明）：

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

⑤ 多元函数泰勒展开

设 $f(x,y) \in C^{n+1}(D)$，其中凸区域 $D \subset \mathbb{R}^2$，则

$$f(x,y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!}(h\partial_x + k\partial_y)^m f(x_0,y_0) + R_n(x_0,y_0)$$

其中 $h = x - x_0, k = y - y_0$.

特别地，$n=0$ 情形对应二元中值定理：

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h + f_y(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k, \quad \theta \in (0,1)$$

在考试中通常只出现展开至二次的情形，若要求展开至三次及以上的情形，则通常会出现可整体换元的齐次变量（例如 $x+y, x^2+y^2$），利用单变量函数的展开公式即可。

例题 1.3 将函数 $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 在点 $(0,0)$ 处展开至四阶，并指出展开式成立的区域。

解 记 $u = x^2+y^2$，则将 $g(u) = (1-u)^{1/2}$ 展开至三阶即可：

$$g(u) = 1 - \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + R_2(u) \implies f(x,y) = 1 - \frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x^2+y^2)^2}{8} + R_4(x,y).$$

⑥ 函数极值判断

1. 无约束极值：通常为二元或三元函数。以二元函数为例，找驻点即计算 $f_x = f_y = 0$ 的点 (x_0, y_0)，再计算

$$A = f_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f_{yy}(x_0, y_0).$$

   (a) 若 $AC - B^2 > 0$，则 $A > 0$ 时该点为函数的极小值，$A < 0$ 时该点为函数的极大值。
   (b) 若 $AC - B^2 < 0$，该点并非极值点。
   (c) 若 $AC - B^2 = 0$，无法判断。

2. 有约束极值：通常为三元函数配单约束。采用 Lagrange 乘子法，定义 Lagrange 函数

$$\mathcal{L}(x, y, z; \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z),$$

   再计算关于各变量偏导为零的点（即驻点）。对于判断极值的部分，在应试中通常为最值判断（见下一小节讨论），因此比较各可疑点函数值大小即可。

⑦ 最值判断

在应试中通常更常出现的是这一类题。

1. 在题目不限制方法的情况下，最优先考虑不等式解法减少讨论，降低计算量。常用的不等式有基本不等式与 Cauchy 不等式。
2. 所有可能的最值点即所有可能的极值点加边界点，且判断最值时不用考虑是否为极值，比较各函数值确定何者最大最小即可。

例题 1.4 椭球体 $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1$ 的内接长方体中，求体积最大的长方体的体积。

解 由内接长方体的对称性，记第一卦限内的顶点为 (x_0, y_0, z_0)，则其体积为

$$V = 8x_0y_0z_0 = 8abc \cdot \frac{x_0}{a} \cdot \frac{y_0}{b} \cdot \frac{z_0}{c} \leqslant 8abc \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}\right)}\right]^3 = \frac{8abc}{3\sqrt{3}},$$

等号成立当且仅当 $x_0/a = y_0/b = z_0/c$，即 $x_0 = a/\sqrt{3}, y_0 = b/\sqrt{3}, z_0 = c/\sqrt{3}$.

例题 1.5 求函数 $f(x, y) = x^2 + xy^2 - x$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ 上的最大值和最小值。

解 (1) 在边界 $x^2 + y^2 = 2$ 上，$h(x) \triangleq g(x, 2 - x^2) = x + x^2 - x^3$ $(|x| \leqslant \sqrt{2})$，可能的极值点满足

$$h'(x) = 1 + 2x - 3x^2 = 0 \implies x = -\frac{1}{3} \text{ 或} 1,$$

代入得

$$h(1) = 1, \quad h\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}, \quad h(\pm\sqrt{2}) = 2 \mp \sqrt{2}.$$

(2) 在区域内部，可能的极值点满足

$$\begin{cases} f_x = 2x + y^2 - 1 = 0, \\ f_y = 2xy = 0 \end{cases} \implies (x, y) = (0, \pm 1), \left(\frac{1}{2}, 0\right),$$

因此 $f(0,\pm 1)=0, f\left(\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}$.

对比各函数值可知：

$$f(x,y)_{\max}=f(-\sqrt{2},0)=2+\sqrt{2},\quad f(x,y)_{\min}=f\left(\frac{1}{2},0\right)=-\frac{1}{4}.$$

1.1.3 多变量函数的重积分

① 积分性质

1. 关于被积函数的线性性：
$$\int_D (c_1f_1+c_2f_2)\,d\sigma=c_1\int_D f_1\,d\sigma+c_2\int_D f_2\,d\sigma.$$
2. 关于积分区域的线性性：
$$\int_{D_1\cup D_2} f\,d\sigma=\int_{D_1} f\,d\sigma+\int_{D_2} f\,d\sigma.$$
3. 不等关系的传递性：
$$f\geqslant g\Rightarrow\int_D f\,d\sigma\geqslant\int_D g\,d\sigma.$$
特别地，若在 D 上 $m\leqslant f\leqslant M$，则 $mA(D)\leqslant\int_D f\,d\sigma\leqslant MA(D)$.
4. 绝对值不等式：
$$\left|\int_D f\,d\sigma\right|\leqslant\int_D |f|\,d\sigma.$$
5. 积分中值定理：$\exists(\xi,\eta)\in D$，使得
$$\int_D f\,d\sigma=f(\xi,\eta)A(D).$$

② 积分的变量代换

一定要注意积分的换元后需乘上变量间的 Jacobi 行列式。

1. 极坐标换元：
$$\begin{cases}x=a\rho\cos\varphi,\\ y=b\rho\sin\varphi,\end{cases}$$
面积元变换为 $dx\,dy=ab\rho\,d\rho\,d\varphi$。柱坐标换元类似。
2. 球坐标换元：
$$\begin{cases}x=ar\sin\theta\cos\varphi,\\ y=br\sin\theta\sin\varphi,\\ z=cr\cos\theta,\end{cases}$$
体积元变换为 $dx\,dy\,dz=abcr^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$。

③ 积分的计算技巧

1. 选取合适积分顺序：
   多重积分时可关注积分区域，判断是否可通过改变积分顺序简便计算解决问题。（具体可见例题1.6）
2. 利用区域对称性和被积函数的奇偶性：
   (1) 若 D 关于 y 轴对称，则有

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D\setminus D_2} f(-x,y)\,dxdy,$$

因而

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 0, & f(-x,y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_2} f(x,y)\,dxdy, & f(-x,y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中 $D_2 = D \cap \{(x,y) \mid x \geqslant 0\}$。关于 x 轴对称同理。

(2) 若 D 关于原点对称，则有

$$\iint_{D_3} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D\setminus D_3} f(-x,-y)\,dxdy,$$

因而

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \begin{cases} 0, & f(-x,-y) = -f(x,y), \\ 2\iint_{D_3} f(x,y)\,dxdy, & f(-x,-y) = f(x,y), \end{cases}$$

其中 D_3 为 D 的右半平面或上半平面部分，$f(-x,-y) = -f(x,y)$ 表示 $f(x,y)$ 关于 (x,y) 为奇函数，$f(-x,-y) = f(x,y)$ 表示 $f(x,y)$ 关于 (x,y) 为偶函数。

(3) 若 D 关于直线 $y = x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_D f(y,x)\,dxdy = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,dxdy = 2\iint_{D_2} f(y,x)\,dxdy$$

其中 D_1 和 D_2 分别为 D 在 $y = x$ 的左上方与右下方部分。

(4) 在三元函数中也应注意轮换对称性：

$$f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y)$$

可通过轮换对称性将被积函数 f 轮换相加得到较好的被积函数。

例题 1.6 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元连续函数，证明：

$$\int_a^b dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \cdots \int_a^{x_{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_n$$

$$= \int_a^b dx_n \int_{x_n}^b dx_{n-1} \cdots \int_{x_n}^b f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1.$$

证明 将积分区域写出即可。

例题 1.7(轮换对称性) 求解

$$\int_\Sigma (x^2+y^2+x+y)dS$$

其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$

解 由于 x,y 为奇函数，

$$\int_\Sigma (x^2+y^2+x+y)dS=\int_\Sigma (x^2+y^2)dS$$

又由于轮换对称性，

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (x^2+y^2)dS&=\frac{1}{3}\int_\Sigma (x^2+y^2+z^2+y^2+z^2+x^2)dS\\&=\frac{2}{3}\int_\Sigma 1\cdot sin\theta d\theta d\varphi=\frac{8}{3}\pi.\end{aligned}$$

1.2 一些应试技巧

1.2.1 定点偏导数的计算

对于显式函数，容易想到先代入其他变量值化为单变量函数再求导. 但对于隐式函数，这一方法也是适用的。

例题 1.8(教材 9.5.5) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z^3-2xz+y=0$ 所确定的隐函数，当 $x=1,y=1$ 时 $z=1$，试按 $(x-1)$ 和 $(y-1)$ 的乘幂展开函数 z 至二次项为止。

解 由题意，

$$z_x(1,1)=\frac{2z}{3z^2-2x}\bigg|_{x=y=z=1}=2,\quad z_y(1,1)=\frac{-1}{3z^2-2x}\bigg|_{x=y=z=1}=-1,$$

进而

$$z_{xx}(1,1)=\frac{2z-(3z^2+2x)z_x}{(3z^2-2x)^2}\bigg|_{x=y=z=1}=-16,$$

$$z_{xy}(1,1)=\frac{6zz_y-2}{(3z^2-2x)^2}\bigg|_{x=y=z=1}=10,$$

$$z_{yy}(1,1)=\frac{6zz_y}{3z^2-2x}\bigg|_{x=y=z=1}=-6,$$

因此二阶展开式为

$$z(x,y)=1+2x-y-8x^2+10xy-3y^2+R_2.$$

1.2.2 利用等值面积分

有时被积函数 f 与积分区域含有同一关于积分变量的整体形式 g，此时可按 $g=\text{const}$ 的等值面划分积分区域，计算出元体积后积分即可。

例题 1.9 计算 $\iint_D \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)\mid \sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant 1, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$.

解 考虑 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$ 与 $x=0, y=0$ 围成的区域面积：

$$A(t)=\int_0^{t^2}\left(t-\sqrt{x}\right)^2\,dx=\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}+1\right)t^4=\frac{t^4}{6},$$

因此

$$\iint_D \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\,dx\,dy=\int_0^1 t\,dA(t)=\frac{2}{3}\int_0^1 t^4\,dt=\frac{2}{15}.$$

例题 1.10 计算 $\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}$，其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x+y+z\leqslant 1, x,y,z\geqslant 0\}$.

解 考虑 $x+y+z=t\ (0\leqslant t\leqslant 1)$，其与坐标平面围成的体积为 $V(t)=\frac{t^3}{6}$，因此

$$\iiint_\Omega \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\frac{dV(t)}{(1+t)^3}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{t^2dt}{(1+t)^3}$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[\frac{1}{1+t}-\frac{2}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1+t)^3}\right]dt=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

例题 1.11(教材 10.2.8) 证明：$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1} f(z)\,dV=\pi\int_{-1}^1 f(z)(1-z^2)\,dz$。

证明 原式 $=\int_{-1}^1 f(z)\,dz\iint_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}dx\,dy=\int_{-1}^1 f(z)\cdot\pi(1-z^2)\,dz.$

1.2.3 柱坐标与球坐标换元的选择

基本上出现因子 $(x^2+y^2+z^2)$ 或曲面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 时，不用怀疑，先采用球坐标变换。比较典型的是配合圆锥面出现。不过对于出现抛物面的情形，由于系统的旋转对称性更高，采用柱坐标可能会使计算更简便。

例题 1.12(教材 10.3.3(1)) 计算 $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$，V 由 $\sqrt{4-x^2-y^2}=z$，$x^2+y^2=3z$ 围成。

解 作柱坐标变换，结合球面与抛物面的几何图像，积分区域化为 $z=\sqrt{4-\rho^2}$ 及 $z=\rho^2/3$。边界相交可解得 $\rho=\sqrt{3}$，因此

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz=2\pi\int_0^{\sqrt{3}}\rho\,d\rho\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}}z\,dz=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(4\rho-\rho^3-\frac{\rho^5}{9}\right)d\rho=\frac{13\pi}{4}.$$

例题 1.13(教材 10.3.4(3)) 计算 $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$，其中 $V: x^2+y^2+z^2<x$。

解 作球坐标变换。由于 x,y,z 具有轮换对称性，可取 $x=r\cos\theta$，则 $V: r\leqslant\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$，因此有：

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{\cos\theta}r^3\,dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos^4\theta\,d\theta=\frac{\pi}{10}.$$

例题 1.14(教材 10.2.5(8)) 计算由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3x$ 围成的区域的体积。

解 作球坐标变换。由于 x,y,z 轮换对称，可取 $x=r\cos\theta$，则曲面方程化为 $r=a(\cos\theta)^{1/3}(0\leqslant\theta\leqslant\pi/2)$，因此

$$V(\Omega)=2\pi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta\int_0^{(a\cos\theta)^{1/3}}r^2\,dr=\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin\theta\cos\theta\,d\theta=\frac{\pi}{3}a^3$$

例题 1.15(教材 Ch10 综合习题 6) 计算由曲面 $(x^2+y^2)^2+z^4=y$ 所围的体积 V.

解 作球坐标变换，则曲面方程化为 $r=[\sin\theta\sin\varphi/(\sin^4\theta+\cos^4\theta)]^{1/3}(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，因此：

$$\begin{aligned}V(\Omega)&=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta\int_0^{[\sin\theta\sin\varphi/(\sin^4\theta+\cos^4\theta)]^{1/3}}r^2\,dr\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\,d\theta=\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\\&=\frac{2}{3}\int_0^{\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,dx=\frac{1}{3}\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}\right)dx\\&=\frac{\sqrt{2}}{3}\left[\arctan\left(\sqrt{2}x-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}x+1\right)\right]_0^{\infty}=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}.\end{aligned}$$

1.2.4 其他典型换元

除去常见的柱坐标和球坐标换元，还有几类典型背景的换元。

1. 出现形如 $y^m=k_{1,2}x^n$ $(m,n\leqslant 2\text{且不同时取}2)$，$x+y=c_{1,2}$，$xy=t_{1,2}$ 的表达式时，通常将其整体换元。
2. 区域 $a|x|+b|y|\leqslant 1\,(a,b>0)$。取
$$\begin{cases}u=ax+by,\\v=ax-by,\end{cases}$$
可将积分区域简化为 $|u|,|v|\leqslant 1$，Jacobi 行列式为 $\dfrac{1}{2}ab$.
3. 形如 $x^m\pm y^n=C$，其中 m,n 非偶数，C 为常数。其换元依据的公式为：
$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,\quad \frac{1}{\cos^2\theta}-\tan^2\theta=1.$$
对于后者还有双曲三角换元（由 $\cosh^2x-\sinh^2x=1$）。使用方法举例来说：对于正号，可取 $x^m=C\cos^2\theta,\ y^n=C\sin^2\theta$，然后计算 Jacobi 行列式再积分即可。典型例子如星形线的面积计算。

例题 1.16(教材 10.2.2(4)) 计算 $\displaystyle\iint_D dx\,dy$，其中 D 由 $y^2=ax,y^2=bx,x^2=my,x^2=ny$ 围成的区域 $(a>b>0,\ m>n>0)$.

解 记 $u=y^2/x,v=x^2/y$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{vmatrix}-y^2/x^2 & 2x/y\\2y/x & -x^2/y^2\end{vmatrix}\right|^{-1}=\frac{1}{3},$$

此时积分区域为 $[b,a]\times[n,m]$，因此：

$$\iint_D dx\,dy=\frac{1}{3}(a-b)(m-n).$$

例题 1.17(教材 10.2.3(2)) 计算由直线 $x+y=a$, $x+y=b$, $y=kx$, $y=mx$ $(0<a<b,\ 0<k<m)$ 围成的平面区域的面积。

解 记 $u=x+y, v=y/x$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{vmatrix}1 & -y/x^2\\ 1 & 1/x\end{vmatrix}\right|^{-1}=\frac{x^2}{x+y}\left|\frac{[u/(1+v)]^2}{u}\right|=\frac{u}{(1+v)^2},$$

此时积分区域为 $[a,b]\times[k,m]$，因此

$$A(D)=\int_a^b\int_k^m\frac{dv}{(1+v)^2}\,du=\frac{b^2-a^2}{2}\left(\frac{1}{1+k}-\frac{1}{1+m}\right).$$

例题 1.18(教材 10.2.2(7)) 计算 $\displaystyle\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\,dx\,dy$，其中 $D=\{|x|+|y|\leqslant 1\}$.

解 记 $u=x+y, v=x-y$，则

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left|\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}\right|^{-1}=\frac{1}{2},$$

此时积分区域为 $[-1,1]\times[-1,1]$，因此

$$\iint_D\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{u\,du}{\sqrt{u+3}}\int_{-1}^1 v\,dv=0.$$

1.3 部分往年考题

习题 1.3.1 (2018 春期中 T5)

求定义在星形区域

$$D=\{(x,y)\,|\,x^{2/3}+y^{2/3}\leqslant 1\}$$

上满足 $f(1,0)=1$ 的正值连续函数 $f(x,y)$ 使得 $\displaystyle\iint_D\frac{f(x,y)}{f(y,x)}\,dx\,dy$ 达到最小, 并求出这个最小值。

解 注意到积分区域 D 具有交换对称性, 因此：

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{2}\iint_D\frac{f(x,y)}{f(y,x)}\,dx\,dy+\frac{1}{2}\iint_D\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\,dy\,dx\\&=\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{f(x,y)}{f(y,x)}+\frac{f(y,x)}{f(x,y)}\right)dx\,dy\geqslant\iint_D dx\,dy,\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $f(x,y)=f(y,x)$，即被积函数也具有交换对称性，如 $f(x,y)=x^2+y^2$.

下面计算星形线的面积：

$$A(D)=\iint_D dx\,dy=\int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\rho\,d\theta\,d\rho$$
$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 sin^2\theta cos^2\theta\rho\,d\rho\,d\theta=\frac{3}{8}\pi.$$

综上有：

$$\iint_D \frac{f(x,y)}{f(y,x)}\,dx\,dy\geqslant A(D)=\frac{3\pi}{8},$$

等号成立当且仅当 $f(x,y)=f(y,x)$.

习题 1.3.2 (2018 春期中 T7)

设 P 是圆 $(x-a)^2+y^2=a^2\ (a>0)$ 上的动点，从原点往圆过点 P 的切线作垂线，垂足为点 Q。当 P 沿圆运动时，点 Q 的轨迹是 xy 平面上一条封闭曲线。求此封闭曲线围成区域的面积。

解 由题可设 $P(a+a\cos\theta,a\sin\theta)$, 则切线直线 PQ 方程为:

$$y=-\cot\theta(x-a-a\cos\theta)+a\sin\theta$$

OQ 方程为:

$$y=\tan\theta\cdot x$$

联立得 Q 坐标为:

$$Q(a\cos^2\theta+a\sin\theta\cos\theta,a\cos\theta\sin\theta+a\sin\theta)$$

可设：

$$x=(a\cos^2\theta+a\cos\theta)r,\ y=(a\cos\theta\sin\theta+a\sin\theta)r$$

区域为：

$$(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant 1)$$

Jacobi 行列式为：

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)a^2r$$

故所求区域面积为:

$$S=\int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta\int_0^1 a^2r^2dr=\frac{3\pi a^2}{2}$$

习题 1.3.3 (2019 春期中 T6)

求椭球

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$$

被平面 $x+y+z=1$ 分割得到的两块中，体积较小的那一块的体积。

解 联想到球的轮换对称性，作坐标变换 $x=\sqrt{2}u, y=\sqrt{3}v, z=2w$，因此问题转化为单位球被平面 $\sqrt{2}u+\sqrt{3}v+2w=1$ 分割的较小一块的体积的 $2\sqrt{6}$ 倍。该几何体恰好为球缺，可证明高 $(R-d)$，球半径为 R 的球缺体积为：

$$\begin{aligned}V(\Omega')&=2\pi\int_0^{\sqrt{R^2-d^2}}\rho\,d\rho\int_d^{\sqrt{R^2-\rho^2}}dz\\&=\pi\int_0^{\sqrt{R^2-d^2}}\left(\sqrt{R^2-\rho^2}-d\right)d\rho^2\\&=\frac{\pi}{3}\left(2R^3-3R^2d+d^3\right).\end{aligned}$$

代入球心到平面的距离 $d=1/3$ 与球半径 $R=1$，可得

$$V(\Omega)=2\sqrt{6}\cdot\frac{\pi}{3}\left(2-\frac{3}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{27}\right)=\frac{56\sqrt{6}}{81}\pi.$$

习题 1.3.4 (2019 春期中 T7)

设 m 是自然数，求积分

$$\iint_{|x|+|y|<1}(x^2-y^2)^m\,dx\,dy.$$

解 记 $u=x+y, v=x-y$，则

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u^m\,du\int_{-1}^{1}v^m\,dv=\frac{1}{2}\left[1-(-1)^m\right]^2\frac{1}{m+1}=\frac{2|\sin(m\pi/2)|}{(m+1)^2}.$$

习题 1.3.5 (2020 春期中 T3)

计算积分

$$I=\iiint_V(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,$$

其中 $V=\{(x,y,z)|x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\leqslant 1\}$.

解 联想到球的轮换对称性，作坐标变换 $x=au, y=bv, z=cw$，因此

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2)abc\,du\,dv\,dw\\&=abc(a^2+b^2+c^2)\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}u^2\,du\,dv\,dw\\&=\frac{abc(a^2+b^2+c^2)}{3}\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(u^2+v^2+w^2)\,du\,dv\,dw\\&=\frac{4\pi}{3}abc(a^2+b^2+c^2)\int_0^1 r^4dr=\frac{4\pi}{15}abc(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

习题 1.3.6 (2020 春期中 T4)

$x,y,z\geqslant 0, x+y+z=1$，用 Lagrange 乘数法求 $f(x,y,z)=x^ay^bz^c\,(a,b,c>0)$ 的最大值。

解 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z;\lambda)=\ln f(x,y,z)+\lambda(x+y+z-1)=a\ln x+b\ln y+c\ln z+\lambda(x+y+z-1),$$

函数 f 取极值满足

$$\begin{cases}L_x=a/x+\lambda=0,\\ L_y=b/y+\lambda=0,\\ L_z=c/z+\lambda=0,\\ \lambda=x+y+z-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_0=-(a+b+c),\\ x_0=a/(a+b+c),\\ y_0=b/(a+b+c),\\ z_0=c/(a+b+c).\end{cases}$$

(这里题目要求最大值，故接下来默认这个唯一的极值点就是最大值点，严格讨论的话，可以代入 $z=1-x-y$ 来讨论二元函数极值，或者这个求解区域是 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭集，即紧集，连续函数在紧集上一定能取到最大最小值，所以讨论一下函数在边界的取值情况就能判断该极值点是最大值点还是最小值点。）已知该函数存在最大值，且 $f(x_0,y_0,z_0)>$ 边界上 f= 0，故

$$f(x,y,z)_{\max}=f(x_0,y_0,z_0)=\frac{a^ab^bc^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}.$$

习题 1.3.7 (2020 春期中 T6)

(a). 求椭球 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{z^2}{25}=1$ 在点 $M_0\left(\sqrt{3},\dfrac{4}{\sqrt{3}},\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$ 的切平面 Π.

(b). 设 V 是切平面 Π 与三个坐标平面围成的区域，求积分

$$I=\iiint_V x\left(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\right)dx\,dy\,dz.$$

解 (a) $\Pi:\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=\sqrt{3}$. (梯度即为切平面法向量)

(b) 可考虑局域等值面 $y/4+z/5=t(0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}-x/3)$，其在 yOz 平面内与坐标轴围成的面积为

$$A(t)=\frac{1}{2}\cdot 4t\cdot 5t=10t^2\implies dA(t)=20t\,dt$$

因此

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{3\sqrt{3}}x\,dx\int_{y/4+z/5\leq\sqrt{3}-x/3}\left(\sqrt{3}-\frac{y}{4}-\frac{z}{5}\right)dy\,dz\\&=\int_0^{3\sqrt{3}}x\,dx\int_0^{\sqrt{3}-x/3}\left(\sqrt{3}-t\right)\cdot 20t\,dt\\&=\int_0^{3\sqrt{3}}x\left[180\int_0^{\sqrt{3}}(\sqrt{3}-u)\left(\frac{3}{2}u^2-\frac{5}{6}u^3+\frac{u^4}{3}\right)\right]du\\&=180\int_0^{3\sqrt{3}}\left(\frac{3}{2}u^2-\frac{5}{6}u^3+\frac{u^4}{3}\right)du=81\sqrt{3}.\end{aligned}$$

习题 1.3.8 (2024 春期中 T6)

设 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$，求证：

$$\frac{(4\sqrt{2}-4)\pi}{3} \leqslant \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2+2y-2z+3}\, dx\, dy\, dz \leqslant \frac{(4\sqrt{2}+4)\pi}{3}.$$

证明 设 $f(x,y,z)=x^2+2y-2z+3$，由于 $f'_y=2\neq 0, f'_z=-2\neq 0$，所以函数 f 在区域 Ω 的内部无驻点，必在边界上取得极值。

令 $F(x,y,z,\lambda)=x^2+2y-2z+3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.

$$\begin{cases} F'_x=2x+2\lambda x=0, \\ F'_y=2+2\lambda y=0, \\ F'_z=-2+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

得出驻点为 $P_1=\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right), P_2=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

而 $f(P_1)=3-2\sqrt{2}, f(P_2)=3+2\sqrt{2}$，所以 $f(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上的最小值为 $3-2\sqrt{2}$，最大值为 $3+2\sqrt{2}$。显然，f 与 $\sqrt{f}$ 有相同的最值点，所以 $\sqrt{f}$ 的最小值是 $\sqrt{2}-1$，最大值为 $\sqrt{2}+1$，所以有：

$$\frac{(4\sqrt{2}-4)\pi}{3}=\iiint_{\Omega}(\sqrt{2}-1)\,dv \leqslant \iiint_{\Omega}\sqrt{x^2+2y-2z+5}\,dv \leqslant \iiint_{\Omega}(\sqrt{2}+1)\,dv=\frac{(4\sqrt{2}+4)\pi}{3}$$

注 此积分不等式的要求极为宽泛，且其考察的最值问题极不明显，因此编者在考场上使用了较为紧凑的不等式证明，即利用柯西积分不等式来确定上界，得到上界为 $\frac{16\pi}{3\sqrt{5}} \approx 7.49$，接近 mma 给出的数值解为 7.31.

第 2 章 第二次：曲线积分和曲面积分

2.1 知识框架

① 第一型曲线积分

1. 概念：函数 f(x,y,z) 在曲线 L 上的积分：
$$\int_L f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\Sigma_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$
2. 基本性质: 线性性、分段可加、**对称性**、积分中值定理等
3. 计算方法：利用参数 t 进行计算。设空间光滑曲线 L 的参数方程为
$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$
则函数 f 在曲线上的第一型曲线积分为
$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

② 第一型曲面积分

1. 参数曲面面积: 曲面可被两个参数 u,v 表示
$$\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v)$$
其面积微元为：
$$dS = |\overrightarrow{r}'_u \times \overrightarrow{r}'_v dudv| = \sqrt{EG-F^2}dudv$$
where,
$$E = \overrightarrow{r}'^2_u$$
$$G = \overrightarrow{r}'^2_v$$
$$F = \overrightarrow{r}'_u \cdot \overrightarrow{r}'_v$$
特别的，若 S 的方程取 $z=f(x,y)$，则 $E = 1+z'^2_x, G = 1+z'^2_y, E = z'_x z'_y$
$$dS = \sqrt{1+z'^2_x+z'^2_y}dxdy$$
2. 计算方法：分为参数法和投影法两种，分别对应上述两种面积微元的表达。
$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \int_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$
$$\int_S f(x,y,z)\,dS = \int_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy.$$

③ 第二型曲线积分与格林公式

1. 第二型曲线积分：向量场 $\overrightarrow{F}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ 沿定向曲线 L 积分
$$\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l}=\int_L Pdx+Qdy+Rdz$$
2. 计算方法：使用参数表达
$$\int_L \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{l}=\int_\alpha^\beta [P(x(t),y(t),z(t))x'(t)+Q(x(t),y(t),z(t))y'(t)+R(x(t),y(t),z(t))z'(t)]\,dt.$$
3. Green 公式：设 D 是由分段简单光滑闭曲线 L 围成的平面有界闭区域，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上有一阶连续偏导数，则有
$$\oint_L P\,dx+Q\,dy=\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$
注 格林公式把沿着平面有界闭区域边界的第二型曲线积分，转化成在这个区域上的二重积分。运用格林公式必须注意以下两点：
   (a). 曲线 L 必须是封闭的。若不封闭，需添加适当的辅助线使之封闭，添加部分要与 L 同向，且这部分线上积分为零，即补线法。
   (b). 函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 上必须有一阶连续偏导数。若在 D 内存在 $P(x,y)$ 或 $Q(x,y)$ 的无定义点、不连续点、不可导点，则一般不能直接用格林公式，需要挖去这些点，即挖洞法。具体做法参看后面的例题。

④ 第二型曲面积分，高斯公式与斯托克斯公式

1. 第二型曲面积分：对于向量场 $\overrightarrow{v}=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$，其第二型曲面积分为
$$\int_S \overrightarrow{v}\cdot d\overrightarrow{S}=\int_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$
2. 参数法：使用 u,v 将曲面参数化，S 的单位法向量为
$$\overrightarrow{n}=\pm\frac{\overrightarrow{r}'_u\times\overrightarrow{r}'_v}{|\overrightarrow{r}'_u\times\overrightarrow{r}'_v|},$$
则第二型曲面积分为，
$$\int_S \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}\,dS=\pm\int_D \overrightarrow{v}\cdot(\overrightarrow{r}'_u\times\overrightarrow{r}'_v)\,du\,dv$$
$$=\pm\int_D\begin{vmatrix}P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}du\,dv$$
3. 投影法：若曲面 S 有显式表示，$z=f(x,y),(x,y)\in D$，则有

$$\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \pm\int_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} dx\,dy = \pm\iint_D (-Pf'_x - Qf'_y + R)dx\,dy$$

其中正负号的选择取决于显式曲面 S 的定侧是上侧还是下侧。

4. Gauss 公式:设空间区域 V 由分片光滑的双侧封闭曲面 S 围成。函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 V 中有一阶连续偏导数，则有

$$\int_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \int_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \int_V \nabla\cdot\vec{v}\,dx\,dy\,dz$$

注 高斯公式把沿着空间有界闭区域外侧边界的第二型曲面积分，转化成在这个区域上的三重积分。运用高斯公式必须注意以下两点:

(a). 曲面 S 必须是封闭的。若不封闭，需要添加辅助面以使封闭，添加的辅助面的定向要与 S 的方向协调，且这部分的曲面积分易计算，即补面法。

(b). 函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ 在 V 中有一阶连续偏导数。若在 V 内存在 $P(x,y,z)$ 或 $Q(x,y,z)$ 或 $R(x,y,z)$ 的无定义点、不连续点、不可导点，则一般不能直接用高斯公式，需用封闭曲面挖去这些点，即挖洞法。具体做法参看后面的例题。

5. Stokes 公式:设 S 是以空间封闭曲线 L 为边界的分片光滑的定向曲面。如果函数 $P(x,y,z), Q(x,y,z),$ 在包含曲面 S 在内的某个空间区域上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

2.2 例题

例题部分以古早往年期末题和 CMC 真题为主，不挑选近年期末真题以防止影响大家复习刷题体验。

习题 2.2.1 (2008 春期末)

计算曲线积分 $I = \oint_L \dfrac{x\,dy - y\,dx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为圆心、半径为 R（$R\neq 1$）的圆周，取逆时针方向。

解 令 $P(x,y) = \dfrac{-y}{4x^2+y^2}$，$Q(x,y) = \dfrac{x}{4x^2+y^2}$，易知 $P, Q \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}.$$

1. 若 $R<1$，则 P,Q 在 L 所围区域 D 上满足格林公式的条件，故
$$I=\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D 0\,dx\,dy=0.$$
2. 若 $R>1$，点 $(0,0)$ 在 L 所围区域内部，而 P,Q 在 $(0,0)$ 处无定义，采取挖洞法。取 $0<\varepsilon<R-1$，作椭圆 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$，方向为逆时针（记为 Γ^+），则 Γ^- 与 L 所围的区域为 D。由格林公式，
$$I=\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}=\oint_{\Gamma^+}\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}.$$
参数化椭圆：设 $x=\dfrac{\varepsilon}{2}\cos\theta$，$y=\varepsilon\sin\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$），则
$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\frac{\varepsilon}{2}\cos\theta\cdot\varepsilon\cos\theta-\varepsilon\sin\theta\cdot\left(-\frac{\varepsilon}{2}\sin\theta\right)}{\varepsilon^2}d\theta=\pi.$$

习题 2.2.2 (2013 春期末)

设 S 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，求曲面积分
$$\iint_S \frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2})^3}.$$

解 记
$$P=x(2x^2+2y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},\quad Q=y(2x^2+2y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},\quad R=z(2x^2+2y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}},$$
计算可得
$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0,\quad (x,y,z)\neq(0,0,0),$$
而 P,Q,R 在 $(0,0,0)$ 点无定义。采用“挖洞法”，作椭球面 $\Sigma:2x^2+2y^2+z^2=\epsilon^2\ (0<\epsilon<1)$，取外侧，所围区域为 Ω，记 S 与 Σ 所围区域为 V，则
$$\iint_S \frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{(\sqrt{2x^2+2y^2+z^2})^3}=\iint_\Sigma \frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{\epsilon^3}.$$
由高斯公式，
$$\iint_\Sigma \frac{x\,dy\,dz+y\,dz\,dx+z\,dx\,dy}{\epsilon^3}=\frac{1}{\epsilon^3}\iiint_\Omega 3\,dV=\frac{3}{\epsilon^3}\cdot\frac{4\pi\cdot\epsilon^3}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=2\pi.$$

习题 2.2.3

计算曲面积分
$$I=\iint_S \frac{x\,dy\,dz+z^2\,dx\,dy}{x^2+y^2+z^2},$$
其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 与两平面 $z=R$ 和 $z=-R$ 所围立体表面的外侧。

解 设 S_1,S_2,S_3 分别为 S 的上底（$z=R$）、下底（$z=-R$）和柱面部分，则
$$\iint\limits_{S_1}\frac{x\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{S_2}\frac{x\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

记 S_1, S_2 在 Oxy 平面上的投影区域为 D，由于两曲面方向相反，则

$$\iint\limits_{S_1} \frac{z^2\,dx\,dy}{x^2+y^2+z^2} + \iint\limits_{S_2} \frac{z^2\,dx\,dy}{x^2+y^2+z^2} = \iint\limits_{D} \frac{R^2}{x^2+y^2+R^2} dx\,dy - \iint\limits_{D} \frac{R^2}{x^2+y^2+R^2} dx\,dy = 0.$$

在柱面 S_3 上，

$$\iint_{S_3} \frac{z^2\,dx\,dy}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

Oyz 平面把 S_3 分为前后两部分，它们在 Oyz 平面上的投影区域都是

$$D_1: -R \leqslant y \leqslant R, \quad -R \leqslant z \leqslant R,$$

前后两部分方向相反，综上得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_3} \frac{x\,dy\,dz}{x^2+y^2+z^2} \\ &= \iint_{D_1} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{(R^2-y^2)+y^2+z^2} dy\,dz - \iint_{D_1} \frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{(R^2-y^2)+y^2+z^2} dy\,dz \\ &= 2\iint_{D_1} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2} dy\,dz \\ &= 2\int_{-R}^{R} dy \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2} dz = \frac{1}{2}\pi^2 R. \end{aligned}$$

故

$$\iint_S \frac{x\,dy\,dz + z^2\,dx\,dy}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2}\pi^2 R.$$

习题 2.2.4 (2008 春期末)

计算曲面积分 $\iint_S (2x+z)dy\,dz + z\,dx\,dy$，其中 S 为有向曲面 $z = x^2+y^2\ (0 \leqslant z \leqslant 1)$，其法向与 z 轴正方向夹角为锐角。

解 作辅助曲面 $\Sigma: z = 1\ (x^2+y^2 \leqslant 1)$，取上侧，这样 $S \cup \Sigma^-$ 形成封闭曲面，指向内侧，它们围成的立体记为 V。由高斯公式知：

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{S} (2x+z)dy\,dz + z\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_{S\cup\Sigma^-} (2x+z)dy\,dz + z\,dx\,dy + \iint\limits_{\Sigma} (2x+z)dy\,dz + z\,dx\,dy \\ &= -\iiint_V \left[\frac{\partial(2x+z)}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial z}\right] dV + 0 + \iint_{x^2+y^2\leqslant 1} dx\,dy \\ &= -3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r\,dr \int_{r^2}^1 dz + \pi = -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

习题 2.2.5 (2021CMC 预赛)

对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2,$$

计算曲面积分 $\oint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$。

解 因为 $f(x,y,z)$ 为 4 次齐次函数，所以对 $\forall t\in\mathbb{R}$，恒有

$$f(tx,ty,tz)=t^4f(x,y,z).$$

对上述两边关于 t 求导，得

$$xf'_x(tx,ty,tz)+yf'_y(tx,ty,tz)+zf'_z(tx,ty,tz)=4t^3f(x,y,z).$$

取 $t=1$，得

$$xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)=4f(x,y,z).$$

设曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\cos\alpha=x,\quad \cos\beta=y,\quad \cos\gamma=z.$$

因此，

$$\begin{aligned}
\oint_{\Sigma} f(x,y,z)dS &= \frac{1}{4}\oint_{\Sigma}\left[xf'_x(x,y,z)+yf'_y(x,y,z)+zf'_z(x,y,z)\right]dS\\
&=\frac{1}{4}\oint_{\Sigma}\left[\cos\alpha f'_x(x,y,z)+\cos\beta f'_y(x,y,z)+\cos\gamma f'_z(x,y,z)\right]dS\\
&=\frac{1}{4}\oint_{\Sigma} f'_x(x,y,z)dydz+f'_y(x,y,z)dzdx+f'_z(x,y,z)dxdy
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\left[f''_{xx}(x,y,z)+f''_{yy}(x,y,z)+f''_{zz}(x,y,z)\right]dxdydz \quad \text{（利用高斯公式）}$$

$$=\frac{3}{2}\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\left[x^2(2a_1+a_4+a_6)+y^2(2a_2+a_4+a_5)+z^2(2a_3+a_5+a_6)\right]dxdydz$$

$$=\sum_{i=1}^{6}a_i\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x^2+y^2+z^2)dxdydz=\sum_{i=1}^{6}a_i\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6}a_i.$$

注 本题使用了欧拉定理，将第一型曲面积分化为第二型曲面积分从而用高斯定理处理。

习题 2.2.6 (2017CMC 预赛)

设曲线 Γ 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+z=1$ 的交线，其中 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，$z\geqslant 0$，且从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段。求曲线积分

$$I=\int_\Gamma ydx+zdy+xdz.$$

解 记 Γ_1 为从点 $B(0,0,1)$ 到点 $A(1,0,0)$ 的直线段，其参数方程为：

$$x=t,\quad y=0,\quad z=1-t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

计算直线段上的曲线积分：

$$\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz=\int_0^1 t\cdot d(1-t)=-\frac{1}{2}.$$

设 Γ 和 Γ_1 围成的平面区域为 Σ，方向按右手法则确定。由 Stokes 公式得：

$$\int_\Gamma ydx+zdy+xdz+\int_{\Gamma_1} ydx+zdy+xdz=\iint_\Sigma \begin{vmatrix} dy\wedge dz & dz\wedge dx & dx\wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

$$=-\iint_\Sigma dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy.$$

由于 Σ 在 z 面上的投影面积为 0，只需计算在 xy 和 yz 面上的投影：

- 在 xy 面的投影为半椭圆 $\dfrac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2}+\dfrac{y^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1$，面积为 $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.
- 在 yz 面的投影面积同样为 $\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}$.

因此得到：$I-\dfrac{1}{2}=-\left(\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}+\dfrac{\pi}{4\sqrt{2}}\right)=-\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$. 最终解得曲线积分：$I=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

习题 2.2.7 (2023CMC 决赛)

设曲面 Σ 是由锥面 $x=\sqrt{y^2+z^2}$，平面 $x=1$，以及球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 围成的空间区域的外侧表面，计算曲面积分：

$$I=\oint_\Sigma \left[x^2+f(xy)\right]dydz+\left[y^2+f(xz)\right]dzdx+\left[z^2+f(yz)\right]dxdy,$$

其中 $f(u)$ 是具有连续导数的奇函数。

解 设 $P=x^2+f(xy)$，$Q=y^2+f(xz)$，$R=z^2+f(yz)$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2(x+y+z)+y\left[f'(xy)+f'(yz)\right].$$

因为奇函数 $f(u)$ 的导数是偶函数，所以 $f'(xy)+f'(yz)$ 关于 y 是偶函数。

记 Ω 是以 Σ 为边界曲面的有界区域，根据 Gauss 公式，并结合三重积分的对称性，得

$$I=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=2\iiint_\Omega xdxdydz.$$

在球坐标系下计算：

$$I=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_{1/\cos\varphi}^{2}\rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,d\rho.$$

$$=\pi\int_0^{\pi/4}\cos\varphi\sin\varphi\left(16-\frac{1}{\cos^4\varphi}\right)d\varphi=4\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{2}.$$

习题 2.2.8 (2020CMC 决赛)

设 Ω 是由光滑的简单封闭曲面 Σ 围成的有界闭区域，函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续二阶偏导数，且 $f(x,y,z)|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$。记 ∇f 为 $f(x,y,z)$ 的梯度，并令

$$\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

证明：对任意常数 $C>0$，恒有

$$C\iiint_\Omega f^2dxdydz+\frac{1}{C}\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\geqslant 2\iiint_\Omega|\nabla f|^2dxdydz.$$

证明 首先利用 Gauss 公式，得

$$\iiint_\Sigma f\frac{\partial f}{\partial x}dydz+f\frac{\partial f}{\partial y}dxdz+f\frac{\partial f}{\partial z}dxdy=\iiint_\Omega(f\Delta f+|\nabla f|^2)dxdydz,$$

其中 Σ 取外侧。因为 $f(x,y,z)|_{(x,y,z)\in\Sigma}=0$，所以上述左端等于零。利用 Cauchy 不等式，得

$$\iiint_\Omega|\nabla f|^2dxdydz=-\iiint_\Omega(f\Delta f)dxdydz\leqslant\left(\iiint_\Omega f^2dxdydz\right)^{1/2}\left(\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\right)^{1/2}.$$

故对任意常数 $C>0$，利用均值不等式有

$$C\iiint_\Omega f^2dxdydz+\frac{1}{C}\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\geqslant 2\left(\iiint_\Omega f^2dxdydz\right)^{1/2}\left(\iiint_\Omega(\Delta f)^2dxdydz\right)^{1/2}$$

$$\geqslant 2\iiint_\Omega|\nabla f|^2dxdydz.$$

习题 2.2.9 (2014CMC 决赛)

设函数 $f(x)$ 连续可导，$P=Q=R=f\left((x^2+y^2)z\right)$，有向曲面 Σ_1 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2,0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面，方向朝外。记第二型曲面积分

$$I_t=\iint_{\Sigma_1}P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

求极限

$$\lim_{t\to0^+}\frac{I_t}{t^4}$$

解 由高斯公式，有

$$I_t=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=\iiint_V\left(2xz+2yz+x^2+y^2\right)f'\left((x^2+y^2)z\right)dV$$

由对称性，有

$$\iiint_V (2xz+2yz)\, f'\left((x^2+y^2)z\right) dV = 0$$

从而

$$\begin{aligned} I_t &= \iiint_V (x^2+y^2) f'\left((x^2+y^2)z\right) dV = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f'(r^2 z) r^3 dr\right] dz \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[\int_0^t f'(r^2 z) r^3 dr\right] dz \end{aligned}$$

计算极限：

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0+} \frac{I_t}{t^4} &= \lim_{t\to 0+} \frac{2\pi \displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^t f'(r^2 z) r^3 dr\right] dz}{t^4} \\ &= \lim_{t\to 0+} \frac{2\pi \displaystyle\int_0^1 f'(t^2 z) t^3 dz}{4t^3} = \lim_{t\to 0+} \frac{\pi}{2} \int_0^1 f'(t^2 z) dz = \frac{\pi}{2} f'(0). \end{aligned}$$

习题 2.2.10

设 P_0 为三维空间内一点，$u(x,y,z)$ 在 $B(P_0,R)$ 中有二阶连续偏导数，且 $\Delta u = 0$. 证明：对任意 $r < R$，有：

$$u(P_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(P_0,r)} u(x,y,z) dS.$$

证明 设 $P_0 = (x_0,y_0,z_0)$，换元：$x - x_0 = r\sin\theta\cos\phi, y - y_0 = r\sin\theta\sin\phi, z - z_0 = r\cos\theta$

则$RHS = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta u(x_0 + r\sin\theta\cos\phi, y_0 + r\sin\theta\sin\phi, z_0 + r\cos\theta) d\theta \triangleq F(r).$

接下来两边对 r 求导，得

$$\begin{aligned} F'(r) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta (u_x \sin\theta\cos\phi + u_y \sin\theta\sin\phi + u_z\cos\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{\partial B(P_0,r)} \nabla u \cdot \boldsymbol{n} dS = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{B(P_0,r)} \Delta u dV = 0 \end{aligned}$$

故 $F(r)$ 在 $(0,R)$ 上恒为常数，从而

$$F(r) = \lim_{r\to 0^+} F(r) = u(P_0).（利用\ u\ 连续且球面紧致易证）$$

习题 2.2.11

设 $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$，满足 $|\nabla f|^2 = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1.$

(1) 证明：$\forall P, Q \in \mathbb{R}^2, |f(Q) - f(P)| \leqslant |P - Q|$;

(2) 设光滑曲线 $\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}, t\in[a,b]$ 满足

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\nabla f(\boldsymbol{r}(t))=\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\boldsymbol{j},$$

证明：$\boldsymbol{r}(t)$ 是直线段。

证明 (1) 记 $P=(x_1,y_1), Q=(x_2,y_2)$。由微分中值定理，存在 x',y'，使得

$$|f(Q)-f(P)|=\left|((x_2-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}(x',y')+(y_2-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}(x',y')\right|$$

由柯西不等式

$$\begin{aligned}\text{上式}&\leqslant\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\\&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=|P-Q|.\end{aligned}$$

即 $|f(Q)-f(P)|\leqslant|P-Q|$.

(2) 取 $P=\boldsymbol{r}(a), Q=\boldsymbol{r}(b)$，则有

$$\begin{aligned}\int_r|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|&=\int_a^b|\nabla f|\mathrm{d}t=\int_a^b\mathrm{d}t=\int_a^b\nabla f\cdot\nabla f\,\mathrm{d}t=\int_r\nabla f\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\&=\int_P^Q\mathrm{d}f=|f(Q)-f(P)|\leqslant|P-Q|.\end{aligned}$$

其中 $\int_r|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$ 为 P,Q 两点间的曲线长度，$|P-Q|$ 为 P,Q 两点间的直线长度，以上结果表明两点间曲线长度不大于直线长度，说明该曲线只能是直线。

习题 2.2.12

设 D 是平面有界区域，$L=\partial D$ 是光滑曲线，$\boldsymbol{n}$ 是 ∂D 的单位外法向量，$v\in C^1(D), v=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}$。用 Green 公式证明：

$$\oint_L(v\cdot\boldsymbol{n})\,ds=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy.$$

证明 设单位外法向量 $\boldsymbol{n}=\cos\alpha\boldsymbol{i}+\sin\alpha\boldsymbol{j}$，则逆时针单位切向量 $\boldsymbol{\tau}=-\sin\alpha\boldsymbol{i}+\cos\alpha\boldsymbol{j}$.

一方面

$$\boldsymbol{\tau}ds=-\sin\alpha\boldsymbol{i}ds+\cos\alpha\boldsymbol{j}ds,$$

另一方面

$$\boldsymbol{\tau}ds=\boldsymbol{i}dx+\boldsymbol{j}dy,$$

故

$$dx=-\sin\alpha ds,\quad dy=\cos\alpha ds.$$

回到原式

$$\oint_L(v\cdot\boldsymbol{n})\,ds=\oint_L(P\cos\alpha\,ds+Q\sin\alpha\,ds)$$

利用 Green 公式

$$= \oint_L P\,dy - Q\,dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

习题 2.2.13

设曲面 $S = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2=1, z \geqslant 0\}$，定向与 z 轴正向同侧。设

$$f = \frac{1+z}{1+x^2+y^2}, \quad g = xy + yz + zx.$$

求积分

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\boldsymbol{S}.$$

解 取曲面

$$S' = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 1, z = 0\},$$

定向与 z 轴反向，则 S 与 S' 构成封闭曲面，定向向外。设其围成区域为 V, 由 Gauss 定理

$$\iint_{S+S'} (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) dV = \iiint_V (\nabla g \cdot (\nabla \times \nabla f) - \nabla f \cdot (\nabla \times \nabla g)) dV = 0.$$

$$\iint_{S'} (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\boldsymbol{S} = \iint_{S'} \left(\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}, \frac{1}{1+x^2+y^2}\right) \times (y, x, x+y) \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$= \iint_{S'} \frac{2y^2 - 2x^2}{(1+x^2+y^2)^2} dxdy = \int_0^{2\pi} -\cos 2\theta d\theta \int_0^1 \frac{r^2}{(1+r^2)^2} dr^2 = 0.$$

故

$$\iint_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\boldsymbol{S} = \left(\iint_{S+S'} - \iint_{S'}\right) (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\boldsymbol{S} = 0.$$

注 $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$

习题 2.2.14

设 Ω 是 $\mathbb{R}^3$ 的有界区域，$\partial\Omega$ 是光滑曲面。

(1) 设 $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$，满足 $\Delta f = \Delta g, f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega}$, 证明：$f = g$.

(2) 设 v_1, v_2 是定义在 $\overline{\Omega}$ 上的光滑向量场，满足：

(a) $\nabla \times v_1 = \nabla \times v_2, \nabla \cdot v_1 = \nabla \cdot v_2$；

(b) $v_1|_{\partial\Omega} = v_2|_{\partial\Omega}$.

证明：$v_1 = v_2$.

证明 (1) 记 $h = f - g$，则 $\Delta h = 0$, $h|_{\partial\Omega} = 0$，要证 $h = 0$.

利用 Gauss 定理

$$0 = \iint_{\partial\Omega} h\nabla h \cdot d\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega \nabla \cdot (h\nabla h)\,dV = \iiint_\Omega ((\nabla h)^2 + h\Delta h)\,dV = \iiint_\Omega (\nabla h)^2\,dV.$$

故 $\nabla h = 0$，这样 h 为常数，又 $h|_{\partial\Omega} = 0$，得 $h = 0$.

(2) 设 $u = v_1 - v_2 = (P, Q, R)$，则 $\nabla \times u = 0, \nabla \cdot u = 0, u|_{\partial\Omega} = 0$.
即

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \ \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}, \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

求导得

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2}, \ \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial z} = 0.$$

从而得到 $\Delta P = 0$，而由 (1) 知 $P = 0$，同理有 $Q = 0, R = 0$，从而 $u = \mathbf{0}$.

第 3 章 第三次：含参变量积分

3.1 知识框架

3.1.1 广义积分

① 广义积分收敛判别法

1. 柯西收敛准则
   设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，则无穷积分 $\int_a^{\infty} f(x)dx$ 收敛的充要条件为：对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists B=B(\varepsilon)>a$，使得当 $b_1,b_2>B$ 时，有
   $$\left|\int_{b_1}^{b_2} f(x)dx\right|<\varepsilon.$$
2. 比较判别法
   设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且对充分大的 x 满足不等式 $0\le f(x)\le g(x)$，那么：若 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛；若 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 发散，则 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 发散
   若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[a,+\infty)$ 上的非负连续函数，且有极限关系 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k$，那么：若 $0<k<+\infty$，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 同敛散。
3. 狄利克雷判别法
   存在 $M>0$，使得对任意 $b\in[a,+\infty)$，且 $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le M$. $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$。那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。
4. 阿贝尔判别法
   积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛, 且 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界。那么积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛。

② 无界函数的广义积分

可变换为无穷区间的广义积分，同样有比较判别法。

③ 常见敛散性

可通过常见的敛散性与比较判别法判断敛散性。

1. $$\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$$
   在 $p<1$ 时收敛在 $p\leqslant 1$ 时发散。

2.
$$\int_a^{+\infty} \frac{sinx}{x^p} dx$$
以及 $\int_a^{+\infty} \frac{cosx}{x^p} dx$，在 $0 < p \leqslant 1$ 时条件收敛，在 $p > 1$ 时绝对收敛，在 $p \leqslant 0$ 时发散。

3.1.2 含参变量常义积分

1. 连续性：极限与积分运算换序。
$$\lim_{u \to u_0} \int_a^b f(x,u)dx = \int_a^b f(x,u_0)dx = \int_a^b \lim_{u \to u_0} f(x,u)dx,$$
2. 可积性：积分运算之间换序。
$$\int_\alpha^\beta \left[\int_a^b f(x,u)dx\right] du = \int_a^b \left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right] dx,$$
3. 可微性：积分和求导之间换序。
$$\psi'(u) = \int_{a(u)}^{b(u)} \frac{\partial f(x,u)}{\partial u} dx + f(b(u),u)b'(u) - f(a(u),u)a'(u)$$

3.1.3 含参变量广义积分

广义积分类比无穷级数，含参变量广义积分类比函数项级数。同样有逐点收敛与一致收敛。

① 含参变量广义积分一致收敛的判别法

1. 魏尔斯特拉斯判别法（最常用）：
设函数 $f(x,u)$ 在区域 $D = [a,+\infty) \times I$ 上连续，如果存在一个 $[a,+\infty)$ 上的连续函数 $p(x)$，使得对充分大的 x（即只关注无穷远性质）以及所有的 $u \in I$，都有
$$|f(x,u)| \leq p(x),$$
且积分 $\int_a^{+\infty} p(x)dx$ 收敛，则含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 I 上一致收敛。
2. 狄利克雷判别法：
设函数 $f(x,u)$ 和 $g(x,u)$ 在区域 $D = [a,+\infty) \times I$ 上连续，且满足以下两个条件，
积分 $\int_a^b f(x,u)dx$ 关于 b 和 u 一致有界，即存在一个与 b 和 u 均无关的常数 K，使得
$$\left|\int_a^b f(x,u)dx\right| \leq K$$
对任意 $b > a$ 和所有 $u \in I$ 成立。函数 $g(x,u)$ 对于每个 $u \in I$ 关于 x 是单调的，并且当 $x \to +\infty$ 时，$g(x,u)$ 关于 u 在 I 上一致趋于零。
那么含参变量广义积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$$
在 I 上一致收敛。

3. 阿贝尔判别法：设函数 $f(x,u)$ 和 $g(x,u)$ 在区域 $D=[a,+\infty)\times I$ 上连续，且满足以下两个条件，
积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 I 上一致收敛。函数 $g(x,u)$ 对于每个 $u\in I$ 关于 x 是单调的，并且 $g(x,u)$ 关于 u 在 I 上一致有界。
那么含参变量广义积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)g(x,u)dx$$
在 I 上一致收敛。

② 一致收敛的含参变量广义积分的性质

1. 连续性：设函数 $f(x,u)$ 在区域 $D=[a,+\infty)\times I$ 上连续，且含参变量广义积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$$
在区间 I 上内闭一致收敛，则函数 $\varphi(u)$ 在 I 上连续，即对任意 $u_0\in I$, 有极限关系
$$\lim_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f(x,u)dx=\int_a^{+\infty} f(x,u_0)dx=\int_a^{+\infty}\lim_{u\to u_0} f(x,u)dx,$$
2. 可积性：设函数 $f(x,u)$ 在区域 $D=[a,+\infty)\times[\alpha,\beta]$ 上连续，且含参变量广义积分
$$\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$$
在有界闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛，则函数 $\varphi(u)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积，并有
$$\int_\alpha^\beta \varphi(u)du=\int_\alpha^\beta\left[\int_a^{+\infty} f(x,u)dx\right]du=\int_a^{+\infty}\left[\int_\alpha^\beta f(x,u)du\right]dx,$$
3. 可微性：1、函数 $f(x,u)$ 和 $\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}$ 在区域 $D=[a,+\infty)\times I$ 上连续。2、含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,u)dx$ 在 I 上收敛。3、含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx$ 在 I 上内闭一致收敛。
那么函数 $\varphi(u)$ 在 I 上可导，并且
$$\varphi'(u)=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}dx\quad (u\in I),$$

3.1.4 含参变量积分的应用

① 几个广义积分

1. 狄利克雷积分：
$$\int_0^{+\infty}\frac{sinx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$
2. 高斯积分：
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

3. 菲涅尔积分：

$$\int_0^{+\infty} sinx^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

② 欧拉积分

1. Γ 函数：

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \quad (x>0)$$

2. 递推公式：当 $x>0$ 时，有 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$。特别地，

$$\Gamma(1)=1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(n+1)=n!, \quad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

3. 余元公式：

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0<x<1).$$

4. B 函数：

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt \quad (x>0, y>0).$$

另一种表示 (换元 $t=\frac{1}{1+z}$)：

$$\mathrm{B}(x,y)=\int_0^{+\infty}\frac{y}{(1+z)^x}dz \quad (x,y>0).$$

5. 递推公式：

$$B(x+1,y)=\frac{x}{x+y}B(x,y); \quad B(x,y+1)=\frac{y}{x+y}B(x,y);$$

$$B(x+1,y+1)=\frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}B(x,y).$$

6. B 函数转化为 Γ 函数:

$$B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x,y>0).$$

3.2 技巧与例题

利用比较判别法，通过判断阶数来判断敛散性。同时注意留意判断瑕点，讨论可能的瑕点和无穷导致的积分的收敛性。

习题 3.2.1

判断积分敛散性

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx;$$

♠

解 因为

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x(x-1)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}=\infty.$$

故 $x=1$ 为瑕点，并有

$$\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx=\int_1^2\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx+\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

当 $x\to 1^+$ 时，

$$\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\sim\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$$

而 $\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ 收敛，故 $\int_1^2\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$ 收敛。

又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0,$$

故当 x 充分大时有 $\ln x<\sqrt{x}$，以及

$$0\le\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\le\frac{x\sqrt{x}}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

而

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$$

收敛，由比较判别法知

$$\int_2^{+\infty}\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx$$

收敛，故原积分收敛。

遇到 sinf(x) 的函数可以尝试换元为 sinx。关于证明 sinx 类函数的条件收敛，在证明其绝对值广义积分发散时通常采取平方放缩化为二倍角的方式。

习题 3.2.2

证明广义积分条件收敛：

$$\int_0^{+\infty}\frac{sin\frac{1}{x}}{x\sqrt{x}}dx$$

解 令 $\frac{1}{x}=t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt=\int_0^1\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt.$$

注意对于右边的积分，0 不是瑕点，$\int_0^1\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 是黎曼积分。对 $\forall A>1$，$\int_1^A\sin tdt$ 有界，$\frac{1}{\sqrt{t}}$ 在 $[1,+\infty)$ 单调减且 $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}=0$，故由狄利克雷判别法，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ 收敛。另外，当

$t \geq 1$ 时，

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{\cos 2t}{2\sqrt{t}} dt.$$

由 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ 发散及 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{\sqrt{t}} dt$ 收敛，知 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} dt$ 发散，则 $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right| dt$ 发散，故原积分条件收敛。

引入参变量函数求积分（费曼积分法）

习题 3.2.3

计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2 sin^2 x + b^2 cos^2 x) dx$$

解 引入参变量函数

$$F(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ln(a^2 sin^2 x + u^2 cos^2 x) dx$$

$$\begin{aligned} F'(u) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2u\cos^2 x}{a^2 \sin^2 x + u^2 \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2u}{a^2 \tan^2 x + u^2} dx t = tanx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2u}{(a^2t^2 + u^2)(1+t^2)} dt \\ &= \frac{2u}{u^2 - a^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{a^2t^2 + u^2}\right) dt = \frac{\pi}{u+a} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \int_a^b F'(u) du = \pi \int_a^b \frac{1}{u+a} du \\ &= \pi \ln(b+a) - \pi \ln(2a) \end{aligned}$$

又 $F(a) = \pi \ln a$，故所求的积分为 $F(b) = \pi \ln \frac{a+b}{2}$。

可通过一致收敛的定义即 $\varepsilon - \delta$ 语言进行判断

习题 3.2.4

指出该积分的一致收敛性

$$\int_0^{\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx \quad \alpha > 0$$

解 事实上本题可通过原函数直接得到，但希望大家熟悉通过定义的证明：根据不一致收敛的

定义，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$，对任意 $A_0>0$，取 $A_1>A_0$ 及 $\alpha_0=\frac{1}{A_1}\in(0,+\infty)$，有

$$\int_{A_1}^{+\infty}\alpha_0 e^{-\alpha_0 x}dx=e^{-\alpha_0 A_1}=e^{-1}>\varepsilon_0,$$

所以 $\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致收敛。

遇到 sinf(x) 的函数可以尝试换元为 sinx.

习题 3.2.5

指出该积分的一致收敛性

$$\int_0^{+\infty}\frac{xsin^3x}{1+x^p}dx\quad p\geqslant 0$$

解 令 $x^3=t$，然后由狄利克雷判别法知，与 p 无关的积分

$$\int_0^{+\infty}x\sin x^3dx=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{\frac{1}{3}}}dt$$

是收敛的。又 $\frac{1}{1+x^p}$ 关于 x 单调且当 $x\geq 0$ 时关于 $p\geq 0$ 一致有界。
所以由含参变量广义积分一致收敛的阿贝尔判别法知，

$$f(p)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x^3}{1+x^p}dx$$

关于 $p\geq 0$ 一致收敛。

计算含参变量积分 $I(u)=\int_a^{+\infty}f(x,u)dx$ 通常有两种解法：

1、将 f(x,u) 表示为积分形式再累次积分。2、求 $I'(u)$ 即对内层 f 求导，再对 u 积分。

两种解法本质相同，选择自己熟悉的解法即可。编者更钟爱前者，因为需要叙述的条件较少，将 f(x,u) 表示为积分形式只需对 u 求导即可。

习题 3.2.6

计算含参变量积分

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{arctan\alpha x}{x(1+x^2)}dx\quad \alpha>0$$

解 由于

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{arctan\alpha x}{x}=\frac{1}{1+x^2\alpha^2}$$

故

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\alpha}\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}$$

又

$$\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}$$

在 $0\le x<+\infty$，$0\le u\le\alpha$ 上连续，且由比较判别法知积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}dx$$

关于 u 在 $[0,\alpha]$ 上一致收敛，故由含参变量广义积分的积分性质，交换积分次序得

$$I(\alpha)=\int_0^{\alpha}du\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2u^2)(1+x^2)}dx$$

计算内层积分：

$$=\int_0^{\alpha}\frac{du}{1-u^2}\left(\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx-\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+x^2u^2}dx\right)$$

利用已知积分结果：

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\frac{1-u}{1-u^2}du=\frac{\pi}{2}\ln(1+\alpha).$$

与 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$ 有关的积分，通常通过分部积分和三角恒等式化为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ 形式。

习题 3.2.7

计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx.$$

♠

解

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx&=-\frac{\sin^4 x}{x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{4\sin^3 x\cos x}{x}dx\\&=\int_0^{+\infty}\frac{(1-\cos 2x)\sin 2x}{x}dx\\&=\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}dx-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 4x}{x}dx\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

对于计算 Euler 积分相关的题目，可参考教材课后题 13.5 的第三题，是较为不错的练习。

3.3 历年真题

习题 3.3.1 (2024 春期末)

设广义积分为

$$I=\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx,\quad (p>0)$$

请分别指出并证明该广义积分绝对收敛和条件收敛时参数 p 的取值范围。

解 首先，我们分析广义积分 I 的绝对收敛性和条件收敛性。

考虑被积函数的绝对值：

$$\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right|.$$

因为 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 单调递增趋于 e，且 e^{sinx} 在 1 到 e 之间，故

$$\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right|\sim\frac{C}{x^p}.$$

因此，广义积分 I 绝对收敛当且仅当 $p>1$。

当 $p\le 1$ 时，我们进一步分析积分的条件收敛性。设：

$$f(x)=\frac{e^{\sin x}\cos x}{x^p}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

注意到 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 单调递增趋于 e，且 $e^{\sin x}\cos x$ 是一个振荡函数。利用 Dirichlet 判别法：

- $\int_1^X e^{\sin x}\cos x\,dx=e^{\sin X}-e^{\sin 1}$ 有界；
- $\frac{1}{x^p}$ 单调递减趋于 0（当 $p>0$）。

因此，由 Dirichlet 判别法，积分 I 收敛。但由于 $p\le 1$ 时积分不绝对收敛，故积分条件收敛当 $0<p\le 1$。

习题 3.3.2 (2021 春期末)

(1) 求使积分

$$\varphi(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}dx$$

收敛的参数 α 的取值范围；

(2) 收敛时，利用 Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$；

(3) 证明：含参变量广义积分 $\varphi(\alpha)$ 在区间 $[-\alpha_0,\alpha_0]$ 上一致收敛（$0<\alpha_0<1$）。

解 (1) 收敛的参数取值范围

首先分析积分 $\varphi(\alpha)$ 的收敛性。将积分区间分为两部分：

$$\varphi(\alpha)=\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^2}dx.$$

- 在 $x \to 0^+$ 时，$\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim x^\alpha$，因此第一个积分收敛当且仅当 $\alpha > -1$。
- 在 $x \to +\infty$ 时，$\frac{x^\alpha}{1+x^2} \sim x^{\alpha-2}$，因此第二个积分收敛当且仅当 $\alpha - 2 < -1$，即 $\alpha < 1$。

综上，积分 $\varphi(\alpha)$ 收敛的参数范围为：

$$-1 < \alpha < 1.$$

(2) 利用 Euler 积分计算 $\varphi(\alpha)$

利用 Beta 函数与 Gamma 函数的关系：

$$B(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

令 $t = x^2$，则 $dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$，代入原积分：

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{\alpha-1}{2}}}{1+t}\,dt.$$

与 Beta 函数的积分形式比较：

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,dt = B(p,q),$$

取 $p = \frac{\alpha+1}{2}$，$q = 1 - \frac{\alpha+1}{2} = \frac{1-\alpha}{2}$，则：

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right).$$

利用 Gamma 函数的余元公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$，令 $z = \frac{\alpha+1}{2}$，得：

$$\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\pi \cdot \frac{\alpha+1}{2}\right)} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.$$

因此：

$$\varphi(\alpha) = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}, \quad \alpha \in (-1,1).$$

(3) 一致收敛性的证明

需证明 $\varphi(\alpha)$ 在 $[-\alpha_0, \alpha_0]$（$0 < \alpha_0 < 1$）上一致收敛。事实上，我们第一问已经证明其在-1 到 1 上收敛，那么内闭一致收敛则是显然的。

根据 Weierstrass 判别法，只需找到非负函数 $g(x)$ 使得：

$$\left|\frac{x^\alpha}{1+x^2}\right| \le g(x), \quad \forall \alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0],$$

且 $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛。

取 $g(x)$ 如下：

$$g(x) = \begin{cases} x^{-\alpha_0}, & 0 < x \le 1, \\ x^{\alpha_0 - 2}, & x > 1. \end{cases}$$

验证：

- 当 $0 < x \le 1$ 时，$x^\alpha \le x^{-\alpha_0}$（因为 $\alpha \ge -\alpha_0$），故 $\left|\frac{x^\alpha}{1+x^2}\right| \le x^{-\alpha_0}$。
- 当 $x > 1$ 时，$x^\alpha \le x^{\alpha_0}$（因为 $\alpha \le \alpha_0$），故 $\left|\frac{x^\alpha}{1+x^2}\right| \le x^{\alpha_0-2}$。

积分 $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 分为两部分：

$$\int_0^1 x^{-\alpha_0}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha_0-2}\,dx.$$

- 第一个积分收敛当且仅当 $-\alpha_0 > -1$，即 $\alpha_0 < 1$；- 第二个积分收敛当且仅当 $\alpha_0 - 2 < -1$，即 $\alpha_0 < 1$。

由于 $0 < \alpha_0 < 1$，故 $\int_0^{+\infty} g(x)\,dx$ 收敛。由 Weierstrass 判别法，$\varphi(\alpha)$ 在 $[-\alpha_0, \alpha_0]$ 上一致收敛。

习题 3.3.3 (2019 春期末)

设 $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx$。求证：

(1) $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续；

(2) $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可导；

(3) $F(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上二阶可导且满足方程 $F''(t) - F(t) = -\frac{1}{t}$。

解 (1) 连续性证明：

$sintx \leqslant 1$，故 $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$，由魏尔斯特拉斯判别法知，F(t) 一致收敛，故连续性得证。

(2) 可导性证明：

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{x\cos tx}{1+x^2}\,dx$$

在 x 趋于无穷时，$\frac{x\cos tx}{1+x^2}$ 趋于 $\frac{costx}{x}$，F'(t) 在 t>0 时内闭一致收敛，故可导性得证。

(3) 计算 F''(t) - F(t)

若直接对上一问的 F'(t) 求导则得到

$$F''(t) = \int_0^{+\infty} -\frac{x^2\sin tx}{1+x^2}\,dx$$

显然这样得到的 F''(t) 并不一致收敛，因而无法将积分与求导换序。故我们重新审视 F'(t) 的形式，尝试分部积分：

$$F'(t) = \int_0^{t+\infty} \frac{xcostx}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{x}{1+x^2} sintx|_0^{\infty} - \int_0^{t+\infty} \frac{\sin tx(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\,dx\right)$$

$$= -\frac{1}{t}\int_0^{+\infty} \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\sin tx\,dx$$

分部积分后，尝试仅用 F(t) 与 F'(t) 组合成题目所求的 F''(t)-F(t)，可进行的尝试有

$F''(t) - F(t) = (F'(t) - F(t))' + (F'(t) - F(t))$，和 $tF''(t) = [tF'(t) - F(t)]'$，此处后者是

可行的：

$$tF'(t)-F(t)=-2\int_0^{+\infty}\frac{sintx}{(1+x^2)^2}$$

$$tF''(t)=[tF(t)-F(t)]'=-2\int_0^{+\infty}\frac{x\cos tx}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{t+\infty}\cos tx\,d\frac{1}{1+x^2}$$

$$=\cos tx\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}+t\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{1+x^2}\,dx$$

$$=-1+tF(t)$$

故 $F''(t)-F(t)=-\frac{1}{t}$

习题 3.3.4 (2017 春期末)

证明：由含参变量的广义积分 $F(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)\,dx$ 定义的函数 $F(t)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的可导函数。

解 先验证 F(t) 收敛：

首先，确认被积函数 $\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 和 $t\in[0,+\infty)$ 上连续。当 $x\to 0^+$ 时，利用泰勒展开 $\ln(1+tx)\approx tx$，因此被积函数近似为 $\frac{\sin x}{x^2}\cdot tx=t\frac{\sin x}{x}$，而 $\frac{\sin x}{x}\to 1$，积分在 $x=0$ 附近收敛。

当 $x\to+\infty$，由于 $\left|\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)\right|\le\frac{\ln(1+tx)}{x^2}$，且 $\ln(1+tx)$ 的增长速度慢于任何多项式，积分在无穷远处收敛。

然后验证导函数一致收敛：

计算被积函数对参数 t 的偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sin x}{x^2}\ln(1+tx)\right)=\frac{\sin x}{x^2}\cdot\frac{x}{1+tx}=\frac{\sin x}{x(1+tx)}.$$

需要证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(1+tx)}\,dx$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 上一致收敛。将积分区间分为 $(0,1)$ 和 $[1,+\infty)$：

- 在 $(0,1)$，利用 $\sin x\approx x$，被积函数近似为 $\frac{1}{1+tx}$，积分收敛。
- 在 $[1,+\infty)$，利用 $\left|\frac{\sin x}{x(1+tx)}\right|\le\frac{1}{x^2}$（因为 $\frac{1}{1+tx}\le\frac{1}{tx}$），积分收敛。

综上，由于被积函数及其对 t 的偏导数在积分区间内连续且积分一致收敛，根据含参变量积分的可微性定理，$F(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导。

习题 3.3.5 (2014 春期末)

计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx$$

，其中常数 $b > a > 0$。

解 因为

$$\int_a^b e^{-x^2u} du = -\frac{1}{x^2} e^{-x^2u}|_a^b = \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2}$$

又 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2u} dx$ 在 (a,b) 上一致收敛，故

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x^2} dx = \int_a^b du \int_0^{+\infty} e^{-x^2u} dx$$
$$= \int_a^b \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{u}} du = \sqrt{\pi b} - \sqrt{\pi a}$$

3.4 关于期末考试

期末考试以考察计算能力为主，分值上：曲线曲面积分和格林公式等占比最大，广义积分及其应用约占两道大题的分数（通常一道判断收敛性、一道具体应用计算广义积分）。

中等难度的题目尽可能保证正确率，较难的题目尽力而为即可、能写出来多少是多少。

考试时间所剩不多时也不要开摆，在剩下的时间仍有可能灵光乍现或检查出错题。

最后祝大家期末考试顺利！